

木星トロヤ群形成に対する
土星成長の影響

学籍番号 07-06585

尾花 勝太

東京工業大学 理学部 地球惑星科学科
指導教員 中本 泰史准教授

2011年2月4日

卒業研究論文

概要

木星の軌道上には、2つの小天体群が存在する。これらは、木星トロヤ群と呼ばれ、太陽と木星のなすラグランジュポイントのL4とL5付近に存在している。木星トロヤ群の形成シナリオは大きく2通り考えられているが、未だにどちらのシナリオが正しいかを決定づける有力な理論は存在しない。そこで本研究では、片方のシナリオに注目し、本当に木星トロヤ群が形成可能なのかを再考した。具体的には以下の通りである。観測によって、L4木星トロヤ群のサイズ分布の特徴のひとつとして、「直径約5km以下の小天体のサイズ分布の傾きが小さい」ことがわかっている。この特徴を説明可能とされている Marzari & Scholl(1998)の研究は、特定の状況のみを扱っている。そこで、惑星形成論の立場から見ても妥当と言える様々なパラメータを用いて、彼らの主張を確かめた。特に、土星がガスを集積する位置やタイミングが、木星トロヤ群に与える影響について、詳しく検討した。その結果、本研究で与えたパラメータ範囲において、Marzari & Scholl(1998)と調和的な結果が得られた。しかし、一部の状況下では、そもそも木星トロヤ群自体が形成されない可能性があることがわかった。

目次

第1章 序論	3
1.1 木星トロヤ群	3
1.2 惑星移動と木星トロヤ群の形成	7
第2章 本研究の目的と意義	11
2.1 先行研究のまとめ	11
2.1.1 数値モデル	11
2.1.2 結果	12
2.2 本研究の内容	12
第3章 数値モデル	14
3.1 エルミート法	14
3.2 乱数	15
3.3 初期パラメータ	16
3.4 各種条件	17
3.5 コードの信頼性	18
第4章 計算結果	24
4.1 先行研究の再現	24
4.2 先行研究の拡張	28
第5章 まとめと考察	33
5.1 結果のまとめ	33
5.2 考察	33
5.3 今後の課題	34
5.3.1 本研究の問題点	34
5.3.2 今後の拡張	35
付録A 円制限三体問題	37
A.1 円制限三体問題の特殊解	37

A.1.1	運動方程式	38
A.1.2	正三角形平衡解	39
A.1.3	直線平衡解	41
A.1.4	L_3 は P_2 の軌道上にあるのか?	45
A.2	ヤコビ積分とゼロ速度曲線	46
A.3	平衡解の安定性	47
A.3.1	正三角形平衡解の安定性	49
A.3.2	直線平衡解の安定性	50
	参考文献	52
	謝辞	53

第1章 序論

1.1 木星トロヤ群

木星トロヤ群とは、木星軌道上付近に存在している小天体の集合のことをいう。木星トロヤ群は、木星軌道上付近に図 1.1 のように存在する。木星トロヤ群は、太陽と木星のなすラグランジュポイントと呼ばれる点付近に存在している。その点上に存在する物体は力学的に安定である事が解析的に知られている。ラグランジュポイントは5つあり (L1~L5点)、L4点とL5点は木星と太陽と正三角形を作るような位置に存在する。ただし、木星の進行方向側にあるのがL4点である(進行方向と逆側がL5点)。ラグランジュポイントについての詳細は、「天体と軌道の力学」(木下宙)[2]をもとに付録として添付した。

図 1.2, 1.3, 1.4 は、L4, L5 木星トロヤ群小天体の累積個数分布を表したグラフである。ある直径以上の小天体の総数を、Sloan Digital Sky Survey (SDSS) や Subarn Main Belt Asteroid Survey (SMBAS-I,-II) とそれ以前の観測によって得られたデータを用いてプロットしてある [3]。横軸は絶対等級で、右に行くほどサイズの小さい小天体を示している。H=9,14,18 はそれぞれ直径 100,10,1km におおよそ対応している。図 1.3, 1.4 において図中の直線は、得られたサイズ分布をべき関数として近似したものである。べき関数は以下のように表される。

$$N(> D) = cD^{-b} \quad (1.1)$$

ここで、 $N(> D)$ は、直径 D 以上の小天体の累計個数を意味している。 c は定数。 b は、図中の直線の傾きに相当する。

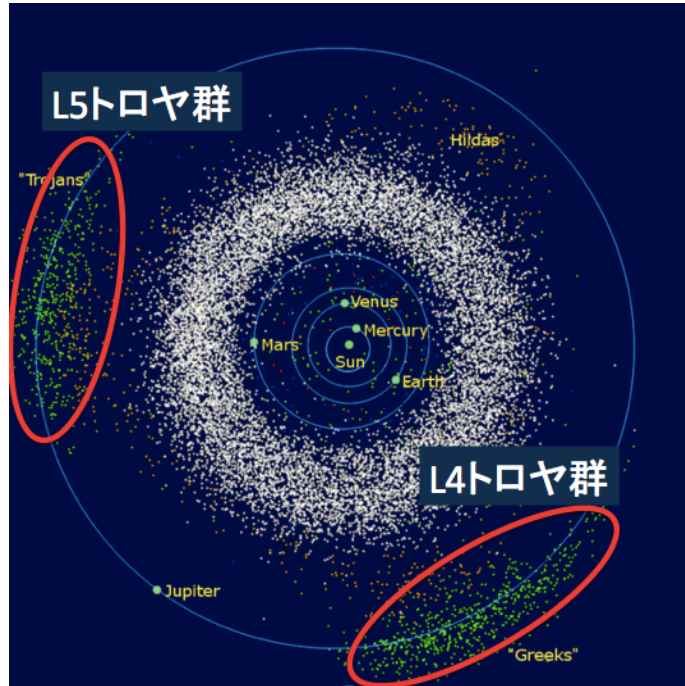


図 1.1 太陽系小天体の分布（木星より内側） [1]

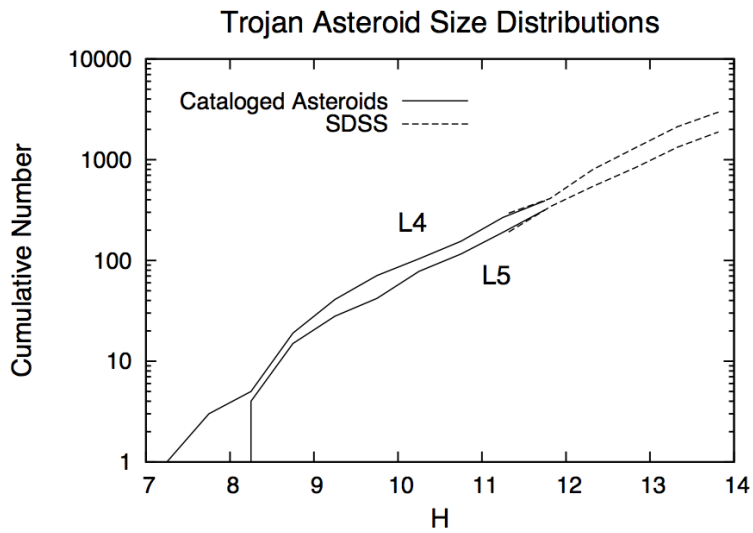


図 1.2 絶対等級 H に対する L4 群と L5 群の累積個数 [4]
 (ある明るさよりも明るい小天体の累積個数)

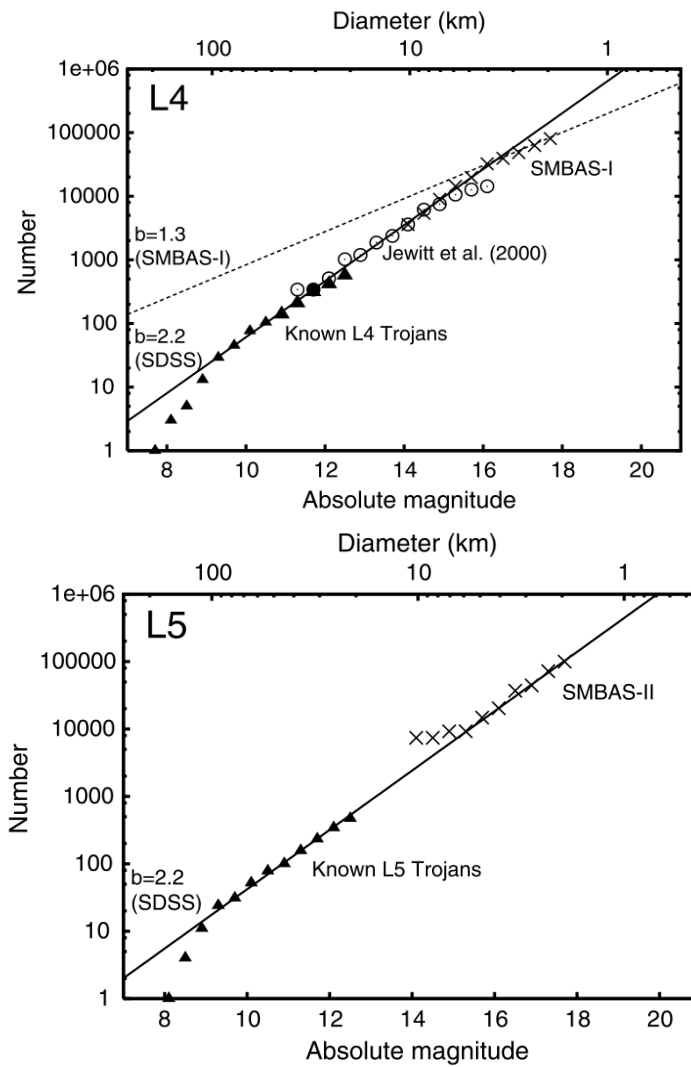


図 1.3 トロヤ群のサイズ分布 [3]

縦軸：累積個数 横軸（下）：絶対等級 横軸（上）：直径 (km)

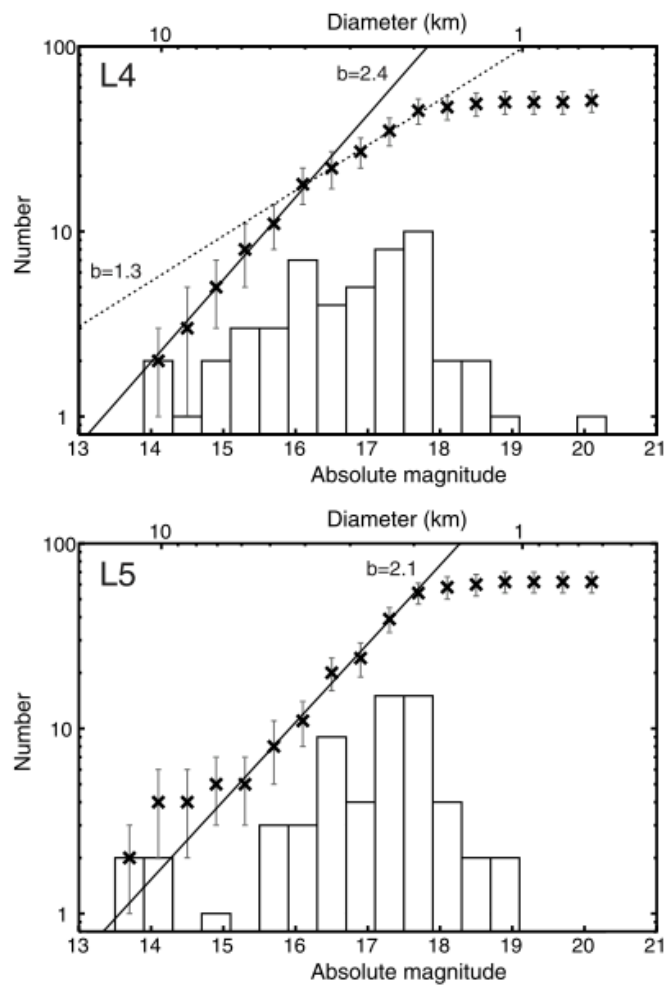


図 1.4 トロヤ群のサイズ分布 [3]

縦軸：累積個数 横軸（下）：絶対等級 横軸（上）：直径 (km)

以上の観測結果より、木星トロヤ群のサイズ分布には以下の3つの特徴が存在するといえる。

1. あるサイズ以上の小天体の累積個数を L4 領域と L5 領域で比較すると、必ず L4 領域の方が多い (図 1.2)。
2. 広いサイズ範囲で、トロヤ群のサイズ分布の傾きが、L4 群と L5 群でほぼ等しい (図 1.3)。
3. L4 群のサイズ分布における直径約 5km 以下の傾き ($b = 1.3$) が、他の傾き ($b \sim 2.1 - 2.4$) と比較して緩やかである (図 1.4)。

以上の3つの特徴について妥当な説明がなされるモデルが、有力な木星トロヤ群形成モデルと言える。また、現在木星トロヤ群に属する小天体は高い軌道傾斜角を持っているが、この事についても説明できなくてはならない。

1.2 惑星移動と木星トロヤ群の形成

原始惑星系円盤内では、ダストが集まって微惑星となり、それらの微惑星同士が集積することで原始惑星が形成されたと考えられている (e.g., [5])。しかし、天王星や海王星が現在の軌道上で成長したと仮定すると、天王星や海王星の形成に必要な時間は、太陽系形成時間を超えてしまう。惑星は、内側で生成される方が早く成長するため、天王星や海王星は、現在の位置よりも太陽に近い場所で形成される必要がある。つまり、天王星や海王星はいったん太陽系の内側で形成され、その後何らかの原因で太陽系の外側に移動した可能性が考えられる (惑星移動)。

惑星移動を説明可能な太陽系形成モデルの一つとして、ニースモデルがある [6]。ニースモデルは、フランスの Nice(ニース)にある研究グループによって考案された。このモデルでは、原始太陽系星雲消失時に木星、土星、天王星、海王星の日心距離がそれぞれ 5.45, 8.65, 13.5-17, 11-13AU であったと仮定している。(土星の日心距離 8.65 は、木星との 1:2 平均運動共鳴が起こる軌道長半径よりも内側である。) 元々それらの位置にあった惑星の軌道長半径が、共鳴や近接遭遇などの影響によって図 1.5 のように変化することを、Tsiganis(2005) たちが提示した [6]。ニースモデルにおいては、惑星移動の過程で木星と土星が共鳴を経てしまうため、元々あった木星トロヤ群が散乱されてしまう。しかし、散乱されると同時に、

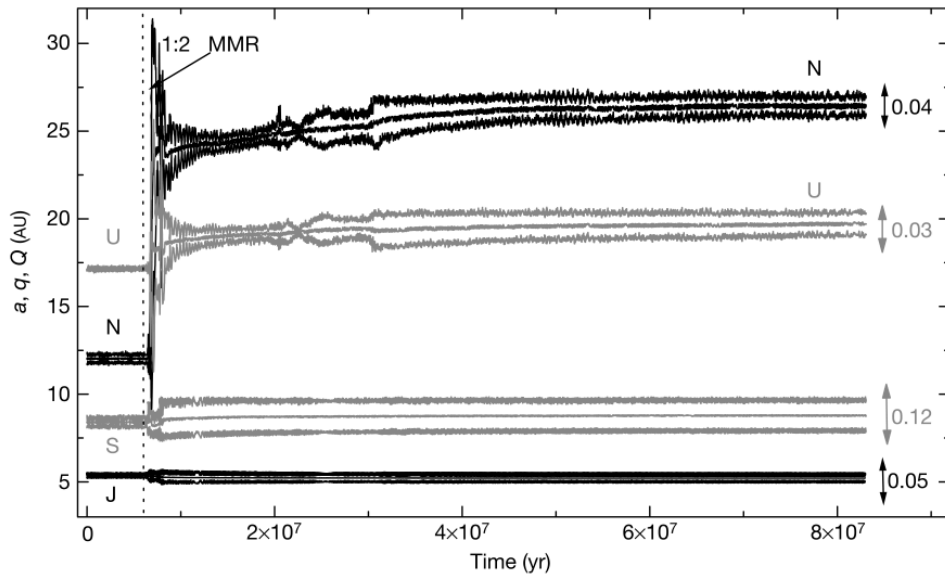


図 1.5 ニースモデルにおける惑星移動 [6]
 縦軸は軌道長半径 J,S,N,U は各々木星, 土星, 海王星, 天王星

カイパーベルトから太陽系の内側に落ちてきた小天体が、木星トロヤ群領域にトラップされる [7]。

以下より、どのように木星トロヤ群の特徴が形成されうるかを考察する。まずはじめに、L4 群と L5 群で全体的にサイズ分布が類似している事について述べる (特徴 2, 図 1.3)。L4 群と L5 群がまったく別起源であるという事は想像しづらい。また、トロヤ群領域の天体の衝突速度は L4 と L5 付近で大差ないので [8]、衝突破壊で生成される破片の量とサイズ分布は同じようになるだろう。次に、L4 群と L5 群の総量の非対称性については (特徴 1, 図 1.2)、2 種類の説明が存在する。Gomes(1998)[9] は、木星トロヤ群は惑星移動が生じる以前から現在の位置に存在していたと仮定し、数値計算を行った。その際、惑星移動前の木星, 土星, 天王星, 海王星の軌道長半径をそれぞれ、5.4, 8.7, 16.3, 23.2AU と仮定した。(8.7AU は、木星との 1:2 平均運動共鳴が起こる軌道長半径の外側である。) 彼は、惑星移動の際に L4 付近の小天体の方が L5 側と比較して、生き残りやすい事を発見した [9]。他にも、Freistetter(2006)[10] によって、土星による長期的な重力摂動によって L4 群と L5 群に非対称が生じる可能性があることがわかった。これらは、木星トロヤ群サイズ分布の特徴 1 の説明となりうる。ニースモデルでは、惑星移動によっていったん木星トロヤ群

がなくなる事を考えているので、前者の概念は導入できないが後者は可能である。次に、L4群の小さな小天体の分布について述べる(特徴3, 図1.4)。Peale(1993)[11]とMarzari & Scholl(1998)[12]は、木星の質量増加(ガス集積)によって小天体がトラップされることを発見した。その際、原始太陽系星雲によるガス抵抗を組み込んだ。彼らは理論的考察と数値計算によって、ガス抵抗が要因となってL4側の直径約1 km以下の小天体が、木星にトラップされにくくなる事を発見した。これは、L4群の小さな小天体のサイズ分布の理論的裏付けとなりうる。ニースモデルにおいて木星トロヤ群が形成されるのは、ガスが晴れた後であるため、ガス抵抗を考慮する事ができない。これは、ニースモデルの弱点と言える。

以上をまとめると、木星トロヤ群形成モデルとして、代表的なものに以下の2つのシナリオが考えられる [3]。

- シナリオ A

まず、木星トロヤ群は巨大惑星のガス集積時に形成されたものと考えられる。その頃は、まだ原始太陽系星雲が残っており、ガス抵抗によってL4の小さい小天体の分布が形成される [11][12]。その後、Gomes(1998)の考える惑星移動によって、全体的にL5群から多くの小天体を取り除かれ [9]、今のようなサイズ分布になった。木星トロヤ群の現在の高い軌道傾斜角については、de Elia & Brunini(2007)[13]の説が正しければ、実現可能である。彼らは、木星トロヤ群小天体の軌道傾斜角は衝突進化によって、現在のような高い値をとる事が可能だと主張している [13]。

- シナリオ B

ニースモデルにのっとり、惑星移動の際に海王星がカイパーベルトに突入し、カイパーベルト天体が散乱され、その一部が木星に捕獲されたと考えられる。この段階では、L4群, L5群の小天体サイズ分布に相違はないが、土星の長期重力摂動によってL5群から一部の小天体を取り除かれる [10]。ニースモデルによる木星トロヤ群の形成では、カイパーベルト由来の軌道が“Hot”な小天体がトラップされているため、シナリオ Aのように、衝突進化まで考慮せずとも高軌道傾斜角の木星トロヤ群を再現可能である [6][7]。ただ、このシナリオではL4群の小さな天体のサイズ分布を説明することはできない。

2つのシナリオが、木星トロヤ群の特徴をどれほど説明可能かをまとめると、表 1.1 のようになる。特徴 1 の要因として、土星による長期的な重

表 1.1: シナリオ A,B の比較

	1	2	3	高軌道傾斜角
シナリオ A	○ [9][10]	○ [8]	○ [11][12]	△ [13]
シナリオ B	△ [10]	○ [8]	×	○ [6][7][13]

- 1: L4 群小天体累積個数が L5 群よりも多い。(図 1.2)
- 2: 全体的に L4,L5 群のサイズ分布がほぼ等しい。(図 1.3)
- 3: L4 群の小さい天体のサイズ分布が逸脱している。(図 1.4)

力摂動 [10] は、両シナリオについて起こっている。しかし、惑星移動による影響 [9] は、シナリオ A にのみ生じる。その意味で、△を用いた。木星トロヤ群に属する小天体が高い軌道傾斜角を持つことについても同様である。衝突進化による説明 [13] は、両シナリオにおいて可能である。しかし、シナリオ B では元々高い軌道傾斜角を持つ小天体がトラップされている。

第2章 本研究の目的と意義

シナリオ A とシナリオ B のどちらが正しいかを検証したい。そこで、両シナリオの決定的な差に注目する。それは、「特徴3を説明できるか否か」である(表 1.1)。この点について、より深い洞察を行うことで、木星トロヤ群形成プロセスが、よりクリアに分かるかもしれない。

シナリオ A で特徴3を説明可能とされている Marzari & Scholl(1998)[12] の研究成果は、限られた状況設定での結果であり、より幅広い考察が必要であると考えた。そこで本研究では、Marzari & Scholl(1998)[12] の行った計算を様々なパラメータで再検証した。

2.1 先行研究のまとめ

Marzari & Scholl(1998)[12] は、木星軌道付近にある小天体が木星の成長によってどれだけ L4 領域と L5 領域にトラップされていくかを、数値計算によって確かめた。その際、小天体へのガス抵抗を考慮すると、直径が約 1km 以下の小天体は L4 群よりも L5 群にトラップされやすくなるという結果が出た。

2.1.1 数値モデル

彼らを用いたモデルを紹介する。彼らは、木星と土星の初期離心率をそれぞれ 0.0157, 0.07 とした。これらの数値は、木星と土星の離心率の永年変化を数値計算し、現在の離心率になるように各々の離心率を逆算したものである。また、土星と木星が $10M_{\oplus}$ から同時に同じ時間をかけて (10^5 年)、指数関数的に現在の質量まで成長する事を仮定した(暴走的ガス降着)。木星と土星の成長は以下の式で表される。

$$M(t) = M_0 + (M_f - M_0) \frac{\exp(t/\tau) - 1}{\exp(1) - 1} \quad (2.1)$$

ただし、 M_0 と M_f はそれぞれ質量の初期値と現在値である。また、 τ は 10^5 (年) である。ところで、ガス抵抗は以下の式で表される。(e.g., Weidenschilling & Davis (1985)[14])

$$\ddot{\mathbf{r}} = -K \begin{pmatrix} v_{relx}^2 \\ v_{rely}^2 \\ v_{relz}^2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

ここで、 K は抵抗パラメータ $K = (3\rho_g C_d / 8\rho_{pl}s)$ である。 ρ_g, ρ_{pl} はそれぞれガス密度と小天体密度である。小天体密度と 5AU 付近のガス密度はそれぞれ $\rho_{pl} \sim 2g/cm^3, \rho_g \sim 10^{-10}g/cm^3$ と見積もれる。 C_d は抵抗係数といって、球状の天体を考えると $C_d \sim 0.4$ となる。 s は小天体半径の木星軌道長半径に対する相対値である。 $v_{relx,y,z}$ はガスに対する小天体の速度である。ガスはギャップを作らず、一定の速度で太陽を周回していると考え。ガス抵抗は木星と土星の成長に伴い、指数関数的に減少することを考えている。

2.1.2 結果

図 2.1 は、彼らの計算結果である。200 個のテスト粒子を木星軌道付近にランダムに置き、木星、土星成長とガス抵抗のもとで、 1.5×10^5 年計算したものである。縦軸は、トラップされた個数を表し、□と●と△は、それぞれ L4 領域, L5 領域にトラップされた小天体の個数および、その個数の和を表している。横軸 K は、小天体半径と読み替える事ができ、 $K = 0.01$ は小天体半径 $\sim 1km$ に相当する。この計算結果から、木星軌道付近の小天体のうち半径約 1km 以内のものは L4 領域よりも L5 領域にトラップされやすいことが分かった。

2.2 本研究の内容

先の章でも述べたが、上記の研究成果により、シナリオ B よりもシナリオ A が有力であると考えられる。しかし、Marzari & Scholl(1998)[12]の数値計算では、ごく一部の状況しか取り扱われていない。また、統計的有意だと言えるほどのデータ量も示されていない。そのため、もっと様々なパラメータで計算の蓄積を行う必要がある。ある条件下では Marzari &

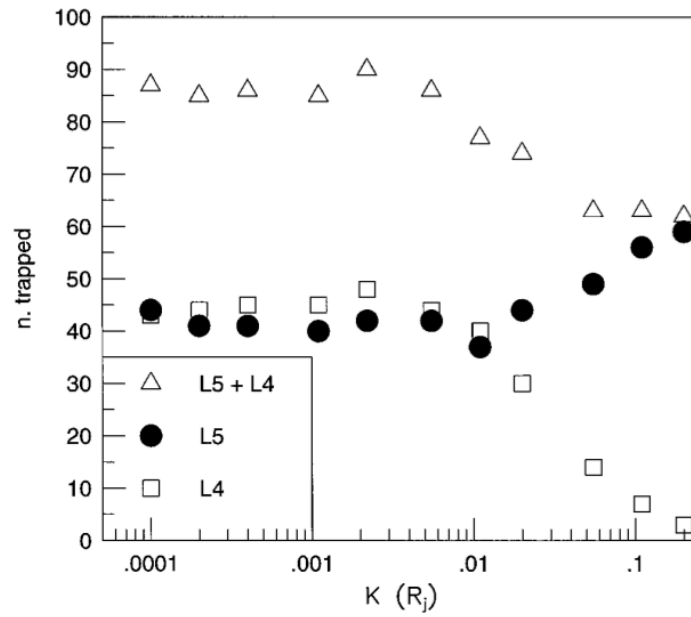


図 2.1 各半径テスト粒子 200 個のうち木星 L4,L5 群に
 トラップされた個数 [12]

Scholl(1998) の主張が通らないと分かれば、太陽系形成史になんらかの制約を与えられるかもしれない。本研究では特に、土星の成長するタイミングとその位置に注目して計算の蓄積を行った。

第3章 数値モデル

この章では、本研究で用いたモデルについて紹介する。基本的な枠組みは Marzari & Scholl(1998)[12] と同じであり、概要は以下の通りである。3次元の、太陽-木星-土星-小天体からなる4体問題を扱う。その際、木星・土星のガス集積による質量増加と原始太陽系星雲による小天体へのガス抵抗を考慮に入れる。

3.1 エルミート法

本研究では、軌道積分に4次のエルミート法を用いた [15]。この手法では、 Δt 先の位置・速度を予測し、その予測の修正を繰り返す事で、 Δt 後の位置・速度を求める。以下より、エルミート法について簡単に説明する。

対象としている粒子 i が、ある時刻に $\mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{v}_{0,i}, \mathbf{a}_{0,i}, \dot{\mathbf{a}}_{0,i}$ という成分を持っているとする。そのとき、 Δt 後の粒子 i の位置速度を以下のように予測する。

$$\mathbf{x}_{p,i} = \mathbf{x}_{0,i} + \Delta t \mathbf{v}_{0,i} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_{0,i} + \frac{\Delta t^3}{6} \dot{\mathbf{a}}_{0,i} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v}_{p,i} = \mathbf{v}_{0,i} + \Delta t \mathbf{a}_{0,i} + \frac{\Delta t^2}{2} \dot{\mathbf{a}}_{0,i} \quad (3.2)$$

ここで得られた $\mathbf{x}_{p,i}, \mathbf{v}_{p,i}$ を予測子と呼ぶ。これを用いて、 Δt 後の加速度 $\mathbf{a}_{1,i}$ とその微分 $\dot{\mathbf{a}}_{1,i}$ を以下のように求める。

$$\mathbf{a}_{1,i} = - \sum_{k \neq i} G m_k \frac{\mathbf{r}_{ik}}{(r_{ik}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \quad (3.3)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{1,i} = - \sum_{k \neq i} G m_k \left[\frac{\mathbf{v}_{ik}}{(r_{ik}^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \frac{3(\mathbf{v}_{ik} \cdot \mathbf{r}_{ik}) \mathbf{r}_{ik}}{(r_{ik}^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \right] \quad (3.4)$$

ただし、

$$\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{x}_{p,i} - \mathbf{x}_{p,k} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{v}_{ik} = \mathbf{v}_{p,i} - \mathbf{v}_{p,k} \quad (3.6)$$

である。 ϵ は、発散を抑えるための定数で、本研究においては $\epsilon = 0$ としてもよかったが、念のため 1.0×10^{-10} とした ($\epsilon = 1.0 \times 10^{-10}$ は、エルミート法の4次の精度に影響を与えない)。次に、修正子を求める。修正子は以下のような式で表される。

$$\mathbf{a}_{0,i}^{(2)} = \frac{-6(\mathbf{a}_{0,i} - \mathbf{a}_{1,i}) - \Delta t(4\dot{\mathbf{a}}_{0,i} + 2\dot{\mathbf{a}}_{1,i})}{\Delta t^2} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{a}_{0,i}^{(3)} = \frac{-12(\mathbf{a}_{0,i} - \mathbf{a}_{1,i}) + 6\Delta t(\dot{\mathbf{a}}_{0,i} + \dot{\mathbf{a}}_{1,i})}{\Delta t^3} \quad (3.8)$$

上式を用いて、先に求めた予測子を以下のように修正する。

$$\mathbf{x}_{c,i} = \mathbf{x}_{p,i} + \frac{\Delta t^4}{24}\mathbf{a}_{0,i}^{(2)} + \frac{\Delta t^5}{120}\mathbf{a}_{0,i}^{(3)} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{v}_{c,i} = \mathbf{v}_{p,i} + \frac{\Delta t^3}{6}\mathbf{a}_{0,i}^{(2)} + \frac{\Delta t^4}{24}\mathbf{a}_{0,i}^{(3)} \quad (3.10)$$

ここで得られた $(\mathbf{x}_{c,i}, \mathbf{v}_{c,i})$ をもとに、加速度とその微分を求める ((3.3), (3.4) 式)。以降、(3.3) (3.10) 式より予測子の修正を繰り返す。ただし、次のタイムステップに進むまで予測子の値は変更しない。本研究では1タイムステップごとに、3回の修正を行った。

タイムステップはAarsethより

$$\Delta t = \eta \sqrt{\frac{|\mathbf{a}_{1,i}| |\mathbf{a}_{1,i}^{(2)}| + |\dot{\mathbf{a}}_{1,i}|^2}{|\dot{\mathbf{a}}_{1,i}| |\mathbf{a}_{1,i}^{(3)}| + |\mathbf{a}_{1,i}^{(2)}|^2}} \quad (3.11)$$

を採用した。ただし、 $t = 0$ のときは、加速度の2階微分と3階微分は計算できないので、加速度 $a_{0,i}$ と、その時間微分 $\dot{a}_{0,i}$ のみを用いて、以下のタイムステップを用いた。

$$\Delta t = \eta \frac{|a_{0,i}|}{|\dot{a}_{0,i}|} \quad (3.12)$$

3.2 乱数

テスト粒子の初期パラメータを与えるために、以下の数列を用いた。

$$I_j = \text{mod}(aI_{j-1} + c, m) \quad (3.13)$$

ただし、 I_j, a, c, m はそれぞれ整数である。 $a > 1$ のとき、この数列はカオス的である。つまり、 I_0 の微小の違いが、後々の I_j の値を大きく変える。 I_j の値域は、 $[0, m]$ であるので、実際には I_j を m で割ったものを用いる。本研究では、

$$a = 1229, c = 351750, m = 1664501 \quad (3.14)$$

とした。

3.3 初期パラメータ

まず、木星と土星の軌道は同一平面内だと仮定した。すなわち、木星と土星の軌道傾斜角を 0° とした。また、木星の離心率は 0.0157[12] と 0.05 の 2 つを考え、土星の離心率は 0.07[12] とした。木星と土星の離心率として 0.0157, 0.07 を採用した理由は、Marzari & Scholl(1998)[12] の再現である。木星の離心率が大きい場合を考えるため、現在の木星の離心率である 0.05 も考えた。一般的に、ガス惑星の離心率はガス膠着の時に減少していくと考えられるため、木星の初期離心率が 0.05 程度の大きな値を持っていた可能性は十分にある。木星の離心率に注目した理由は、L4, L5 群へのトラップ数の非対称性を生み出すメカニズムに、ガス抵抗以外に木星の離心率も関与しているためである。 $(e_j = 0$ だと、たとえガス抵抗があったとしても、L4, L5 に非対称は生じない [12]。) 木星の軌道長半径を 1 とし (規格化)、土星の軌道長半径を 1.6 と 1.83 の 2 種類を考慮した。軌道長半径 1.6 は木星との 1:2 平均運動共鳴 (~ 1.58) の少し外側であり、Gomes(1998)[9] の惑星移動モデルにおける土星軌道長半径初期値 (~ 1.61) に近い値である。1.83 というのは、現在の土星の軌道長半径に対応している。小天体の軌道長半径, 離心率, 軌道傾斜角は Marzari &

表 3.1: 各天体の初期軌道要素

	a	e	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	$E(^{\circ})$
木星	1 (5.2 AU)	0.0157,0.05	0	-	0	0
土星	1.6,1.83 (8.32,9.52 AU)	0.07	0	-	0	0
テスト粒子	0.96-1.04 (4.99-5.41 AU)	0-0.15	0-5	0-360	0-360	0

a : 軌道長半径 e : 離心率 i : 軌道傾斜角
 Ω : 昇交点黄経 ω : 近点離角 E : 離心近点角

Scholl(1998)[12]と同じく、それぞれ $0.96 - 1.04$ 、 $0 - 0.15$ 、 $0 - 5^\circ$ の範囲で与えた。なお、軌道長半径 0.97 以下と 1.03 以上の小天体は、木星にトラップされないことが実験的にわかっている [12]。惑星の初期の位置関係は、太陽-木星-土星の順で一直線になるように配置し、小天体は上記の範囲内でランダムに置いた。太陽の初期位置と初期速度は、全体の重心の初期値と初期速度がゼロとなるように与えた。木星と土星の初期質量はともに $10M_{\oplus}$ とし、小天体は質量 0 のテスト粒子として与えた。

3.4 各種条件

木星と土星は質量 $10M_{\oplus}$ 付近から急激に周囲のガスを吸収して成長したと考えられている [16]。現在の木星の質量は土星よりも大きいことから、土星よりも木星が先に成長したと推測できる。しかし、これらの惑星が具体的にどのようなタイミングでどれほどの時間をかけて成長したかは未だに分かっていない。よって、本研究では2つの極値の状態を考える。ひとつは、Marzari & Scholl(1998)[12]と同じく、木星と土星が同時に同じ時間 (10^5 年) だけかけて成長したと仮定する。もうひとつは、木星と土星がまったく別の時期に同じ時間 (10^5 年) だけかけて成長したことを仮定する。前者の計算時間は 1.5×10^5 年である。この計算では、 10^5 年で木星と土星を成長させた後、 5.0×10^4 年計算を継続した。(Marzari & Scholl(1998)[12] は、テスト粒子の安定性や振幅を見るために計算を継続した。彼らの計算を再現するために、計算時間は同じにする必要がある。) 一方で、後者の計算時間は 3.0×10^5 年である。この計算では、木星が 10^5 年で成長し、 5.0×10^4 年経った後に土星が 10^5 年かけ成長したことを考え、最後に 5.0×10^4 年計算を継続した。木星と土星の成長は、(2.1) 式に従うと考え、木星の成長と同時にガス抵抗も同じ式に従ってなくなるものとした。(土星が後から成長することを考える場合にも、木星が成長し終わったあとにはガス抵抗はなくなると考えた。これは、木星が原始太陽系ガス円盤にギャップを作る事を考えている。)

テスト粒子がトロヤ群に属しているかどうかは、テスト粒子と木星とのなす角で判断した。計算終了前の 5.0×10^4 年の期間中ずっと、テスト粒子と木星とのなす角が $0-180^\circ$ ($180-360^\circ$) 以内であれば、L4(L5) 群に属していると判断した。また、計算中にテスト粒子と太陽との距離が、木星の軌道長半径の 100 倍を超えた場合や $1/100$ 倍を下回った場合には、ただちに計算を終了した。そのようなテスト粒子は、木星トロヤ群領域に

トラップされ得ないと判断した。

3.5 コードの信頼性

本研究で用いたコードが正しく動作しているかどうかを確かめる事は、きわめて重要である。コードの信頼性を確かめる方法の一つとして、ピタゴラス問題が挙げられる。ピタゴラス問題は、重力相互作用する三体問題の一種である。初期値として、三辺の長さが3, 4, 5の三角形の各頂点に3, 4, 5の質量をもつ質点を静止した状態で置く。図3.1は、ピタゴラス問題の重力相互作用をエルミート法によって計算し、時間30-70の3質点の軌道をプロットしたものである（微惑星系、惑星リング系のN体計算, 井田ほか, 2006[15])。本研究用コードでの計算結果は図3.2のようになった。図3.1, 3.2の計算結果がほぼ一致していることがわかる。

次に、エネルギー保存についてチェックを行った。図3.3, 3.4は、本研究用コードの計算がエネルギーを保存しているかどうかを示すグラフである。木星と土星の成長を加味し、タイムステップごとのエネルギー変化を積分して求めた E' と、天体の位置や速度によって直接求めたエネルギー E を比較した。図中の dE は $dE = E' - E$ である。見て分かる通り、エネルギー保存の誤差は0.001%以内に収まっている。

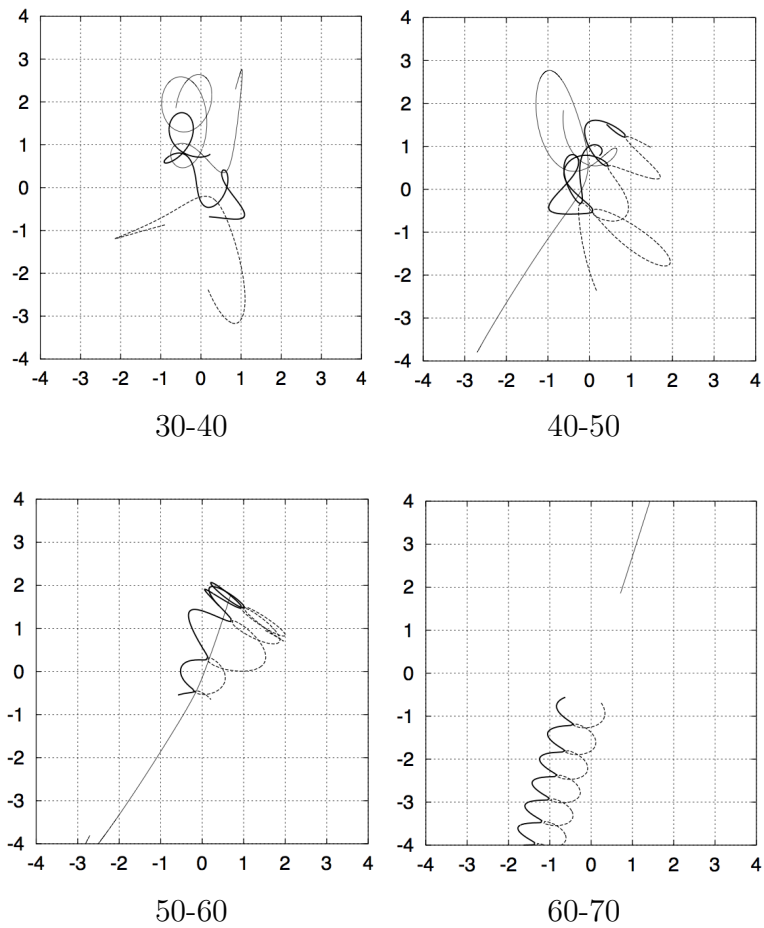


図 3.1 ピタゴラス三体問題 [15]
(図の下の数字は時刻)

最後に、Marzari & Scholl(1998)[12] の計算の再現を行った。図 3.5 は、小天体が木星成長によって L5 領域にトラップされる様子を示している [12]。図 3.6 は、本研究用コードによる計算結果である。初期値が多少違うため (Marzari & Scholl(1998)[12] は具体的な初期条件を明示していない)、完全に一致はしないが、おおよその小天体軌道要素の時間変化は再現できている。トラップされた小天体の振幅が木星成長とともに減衰していく [12] 点についても再現できていることが分かる。(ただし、図 3.5, 3.6 の計算では、土星の存在やガス抵抗の効果は考慮されていない。)

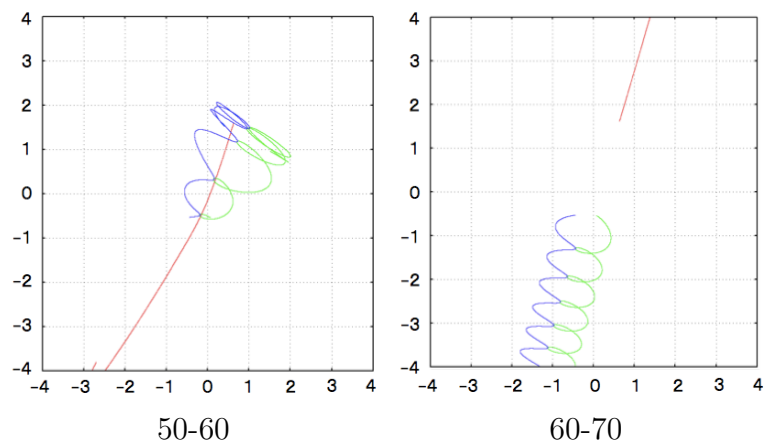
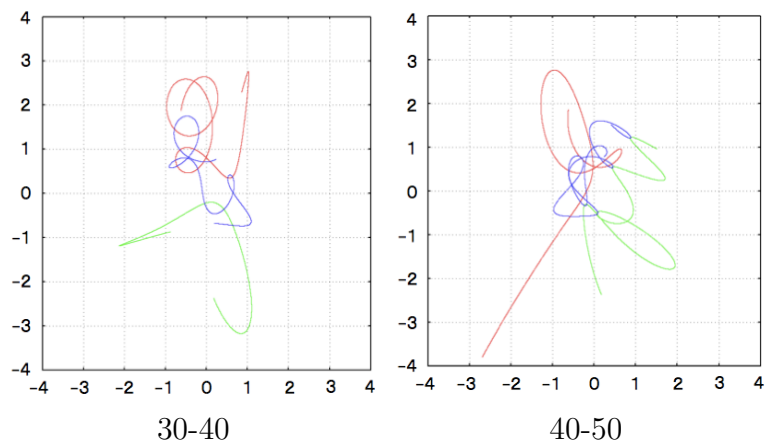


図 3.2 ピタゴラス三体問題 (本研究用コード)
(図の下の数字は時刻)

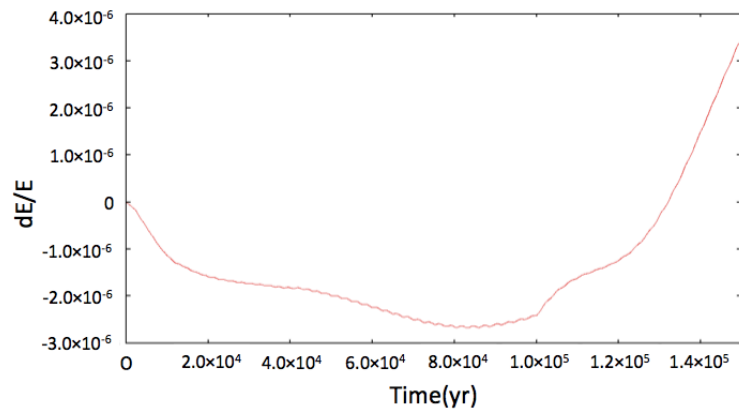


図 3.3 木星土星同時成長 ($0 - 1.5 \times 10^5 \text{yr}$) のエネルギー保存誤差

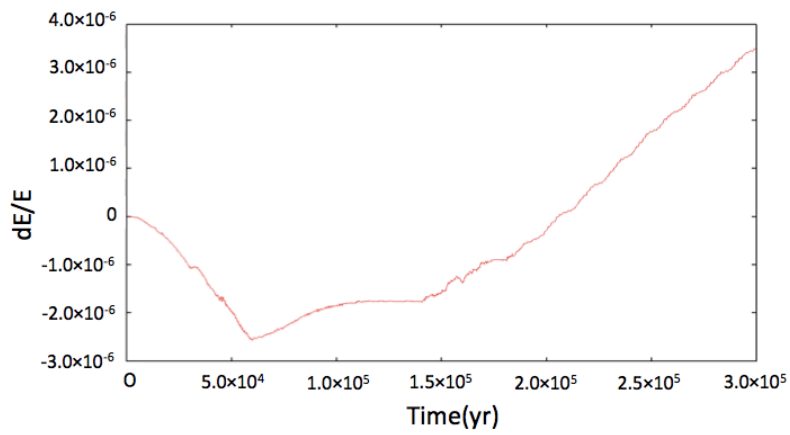


図 3.4 木星土星順番成長 ($0 - 3.0 \times 10^5 \text{yr}$) のエネルギー保存誤差

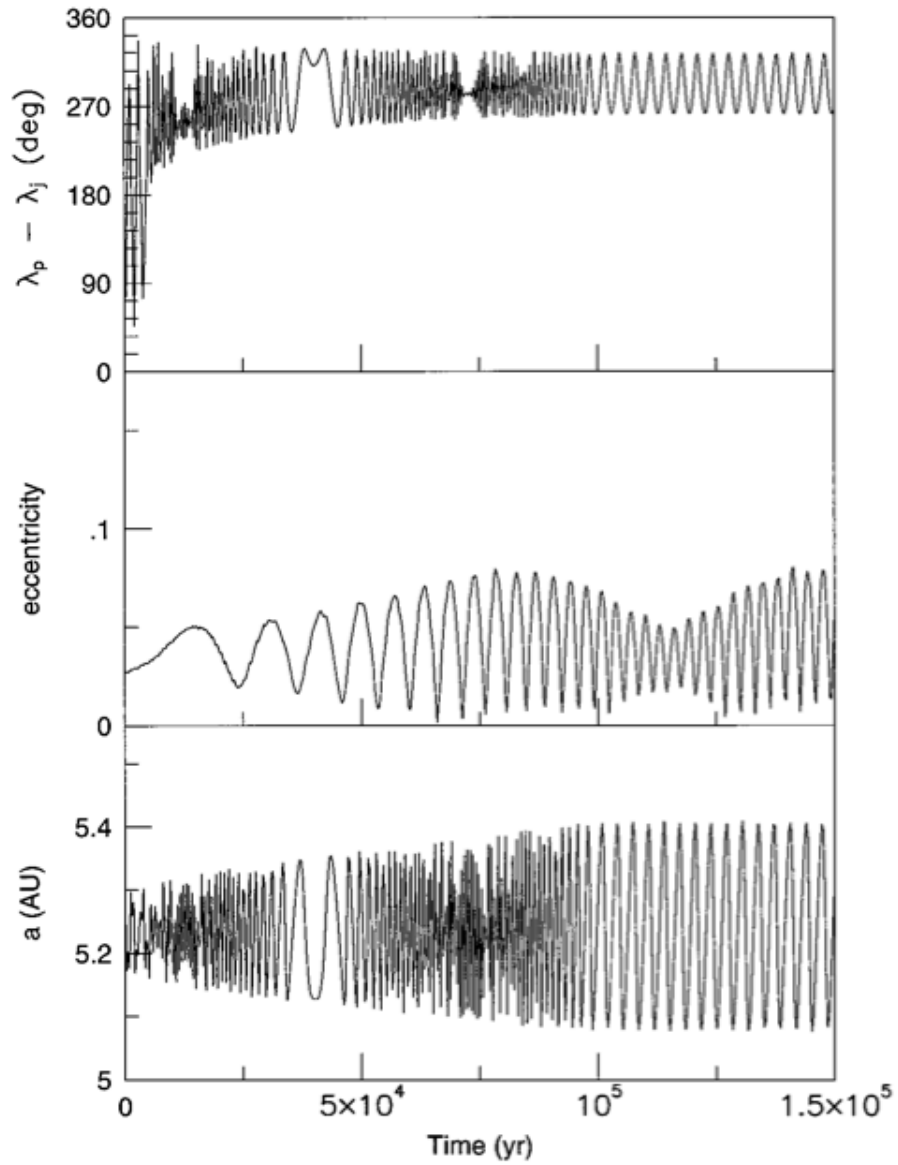


図 3.5 Marzari & Scholl(1998)[12] による小天体の軌道計算
上から順に、木星方向を基準とした黄経、離心率、軌道長半径の時間変
化である。

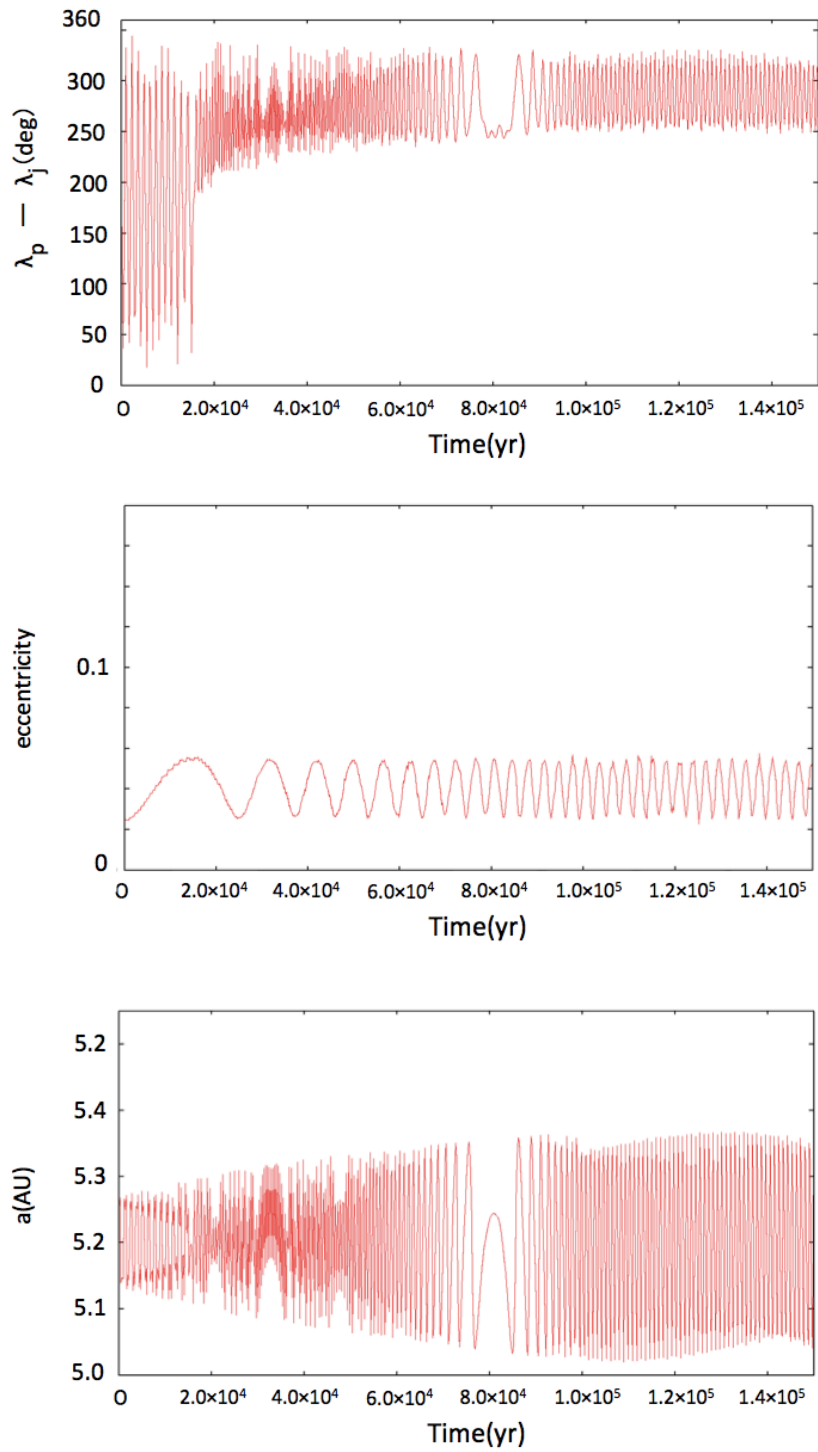


図 3.6 本研究用コードによる軌道計算 (小天体の初期パラメータとして、 $a = 5.252$, $e = 0.025$, $i = 0$, $\Omega = 0^\circ$, $\omega = 180^\circ$, $E = 0^\circ$ を与えた。)

第4章 計算結果

4.1 先行研究の再現

まず、Marzari & Scholl(1998)[12]の計算結果(図2.1)の再現を行った。以下のような状況において、200個のテスト粒子の運命を計算した。(詳細は第3.4項「各種条件」を参照していただきたい。)

- 木星と土星は同時に 1.0×10^5 年かけて成長する。
- 初期 $a_s = 1.83$
- 初期 $e_j = 0.0157$

テスト粒子の初期位置は、図4.1のようになっている。ただし、太陽は図中の(0,0)付近にあり、木星は(1,0)付近に存在する。これらのテスト粒子は、木星成長によって図4.2のように木星トロヤ群を形成する。

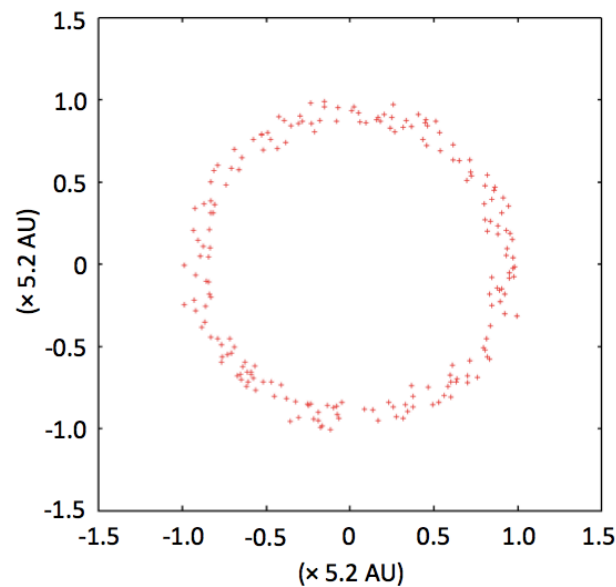


図4.1 テスト粒子の初期位置 乱数初期値 $I_0 = 9$

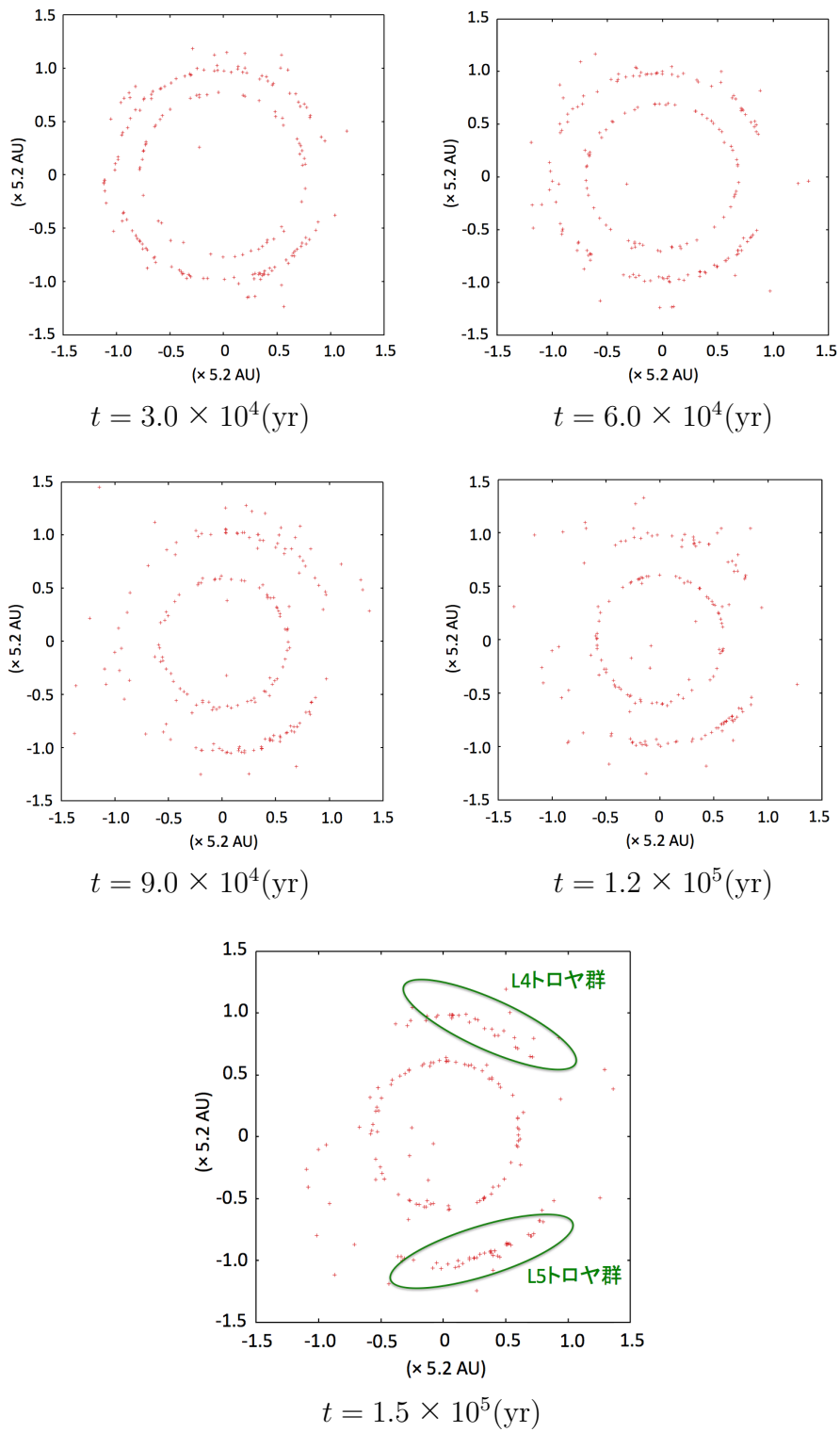


図 4.2 半径 0.1km のテスト粒子の運命
 (同時成長, 初期 $a_s = 1.83$, 初期 $e_j = 0.0157$, $I_0 = 9$)

図4.2中の内側に円環状にたまっている天体は、ガス抵抗によって軌道長半径が減少した小天体群である。このような計算を、様々な小天体の半径に対して、10ランずつ行った。その結果は表4.1にまとめた。このデータをもとに、L4群、L5群のトラップ数の平均値をグラフにプロットしたものが、図4.3である。エラーバーには標準偏差を用いた。半径約1 km以下の小天体に関して、L4とL5でトラップされる個数の非対称性が確認できた。ただし、 $K = 0.1$ 付近のL5領域へのトラップ数は再現できなかった。その原因については、第5.3.1項で議論する。

小天体の半径 (km)

	100		10		1		0.5		0.1		0.05		0.01	
	L4	L5	L4	L5	L4	L5	L4	L5	L4	L5	L4	L5	L4	L5
1	44	34	45	38	46	51	49	44	30	41	22	44	0	95
2	34	37	40	41	48	40	47	36	27	42	12	48	2	80
3	41	38	42	44	57	40	51	43	25	45	19	38	0	80
4	28	36	39	35	46	40	43	45	25	42	17	38	1	84
5	32	43	35	44	47	43	38	46	20	40	13	37	0	86
6	27	35	27	41	32	46	35	43	21	36	13	33	2	76
7	41	36	50	40	45	47	49	45	22	39	16	34	0	78
8	37	32	28	42	50	35	36	41	19	26	9	30	0	64
9	45	45	48	46	50	43	52	39	26	42	17	36	0	82
10	26	41	39	36	36	51	37	43	20	35	14	30	2	76

表4.1 テスト粒子 (200個) の運命 (左から順にL4群にトラップされた個数, L5群にトラップされた個数である。)

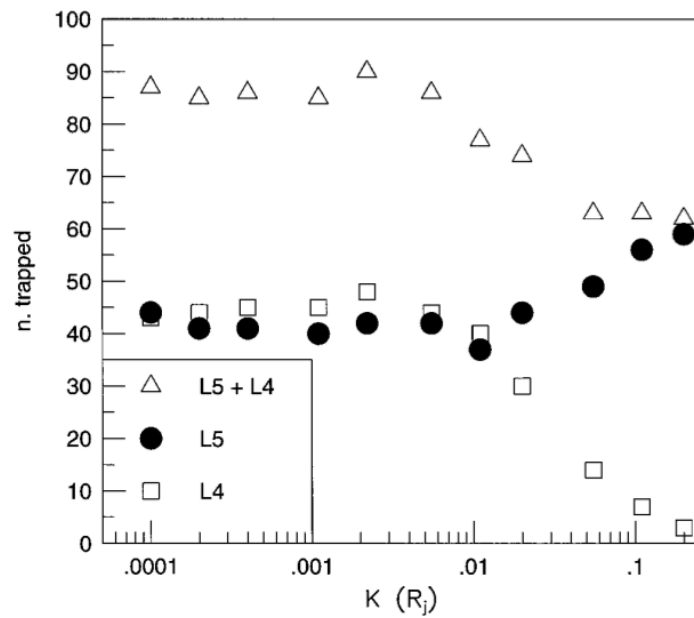
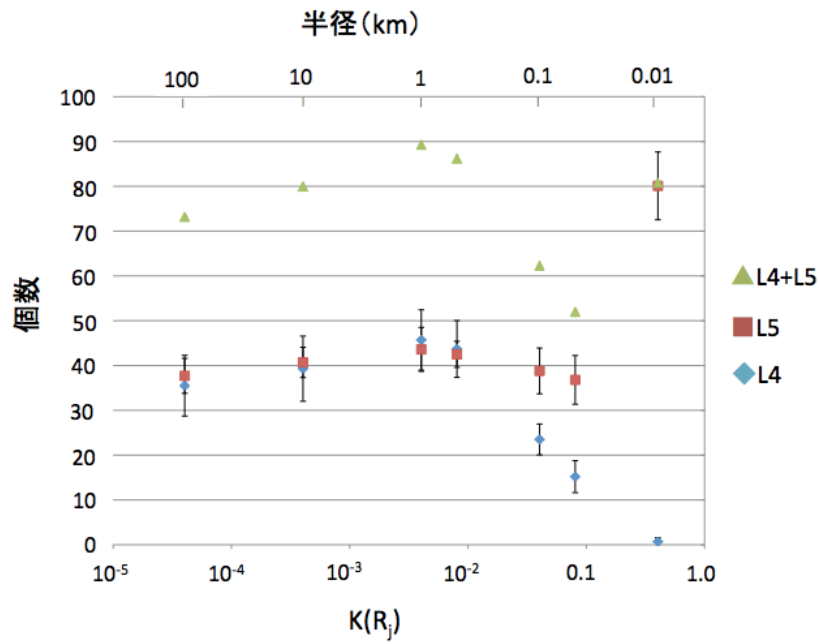


図 4.3 各サイズのテスト粒子の運命 (下図は図 2.1 の再掲)
(同時成長, 初期 $a_s = 1.83$, 初期 $e_j = 0.0157$)

4.2 先行研究の拡張

次に、条件を変えて計算した。操作するパラメータとして、特に土星の成長する場所とタイミングを考慮した。また、木星の離心率の違いも考えた。具体的に以下のように条件を変え、計8パターンの計算をそれぞれ10ランずつ行った。

- 同時成長 or 順番成長
- 初期 $a_s = 1.83$ or 1.6
- 初期 $e_j = 0.0157$ or 0.05

ただし、L4, L5 群へのトラップ数の非対称性が生じる半径0.1kmの小天体のみに注目した。表4.2は、その計算結果である。また、平均値と標準偏差を表4.3のようにまとめた。ただし、平均値は小数点以下を、標準偏差は小数点第2位以下をそれぞれ四捨五入してある。

同時成長

	as=1.83,e=0.0157		as=1.6,e=0.0157		as=1.83,e=0.05		as=1.6,e=0.05	
	L4	L5	L4	L5	L4	L5	L4	L5
1	30	41	24	40	16	40	22	51
2	27	42	19	40	9	42	16	50
3	25	45	19	45	16	39	16	49
4	25	42	15	34	8	41	14	41
5	20	40	16	41	9	44	14	43
6	21	36	18	37	7	34	10	41
7	22	39	21	31	11	34	19	38
8	19	26	14	31	8	28	10	34
9	26	42	21	37	9	44	13	55
10	20	35	17	38	8	36	16	42

順番成長

	as=1.83,e=0.0157		as=1.6,e=0.0157		as=1.83,e=0.05		as=1.6,e=0.05	
	L4	L5	L4	L5	L4	L5	L4	L5
1	32	46	22	36	16	40	2	3
2	24	46	16	38	9	42	3	5
3	28	52	20	35	15	39	1	9
4	27	45	18	33	10	41	1	8
5	23	46	16	32	11	44	3	8
6	27	34	15	30	8	34	0	5
7	27	44	23	27	11	35	2	5
8	20	33	18	22	8	28	2	4
9	30	47	22	29	10	42	1	11
10	22	37	12	32	8	38	3	6

表4.2 半径0.1kmのテスト粒子200個の運命

同時成長

	$a_s = 1.83$		$a_s = 1.6$	
	L4	L5	L4	L5
$e_j = 0.0157$	24(3.4)	39(5.1)	18(2.9)	37(4.2)
$e_j = 0.05$	10(3.1)	38(4.4)	15(3.5)	44(6.2)

順番成長

	$a_s = 1.83$		$a_s = 1.6$	
	L4	L5	L4	L5
$e_j = 0.0157$	26(3.5)	43(5.9)	18(3.4)	31(4.4)
$e_j = 0.05$	11(2.7)	38(4.5)	2(1.0)	5(2.3)

表 4.3 L4, L5 群へのトラップ数の平均値 (括弧の中は標準偏差)

表 4.3 から分かる通り、すべての計算において、L5 群へのトラップが L4 群へのトラップを上回った。このことから、様々なパラメータにおいても、Marzari & Scholl(1998)[12] の主張する L4, L5 非対称性が確認できた。しかし、ここで一点問題がある。「順番成長, $a_s = 1.6, e_j = 0.05$ 」のときのトラップ数が極めて少ない。確率的に 200 個のテスト粒子のうち約 8% は元々木星トロヤ群に属している [12]。言い換えれば、元々 L4 群, L5 群にそれぞれ (平均的には) 8 個ずつのテスト粒子が、属していることになる。しかし、「順番成長, $a_s = 1.6, e_j = 0.05$ 」のときのトラップ数は L4, L5 群いずれも 8 より少ない。すなわち、「順番成長, $a_s = 1.6, e_j = 0.05$ 」の場合、木星トロヤ群が形成されない可能性がある。そこで以下より、

- 木星と土星は順番に 10^5 年かけて成長する。
- 初期 $a_s = 1.6$
- 初期 $e_j = 0.05$

の場合に注目する。先の計算では小天体半径 0.1km のみしか考えていないため、より幅広い小天体半径での計算を試みた。そのデータとグラフをそれぞれ、表 4.4, 図 4.3 にまとめた。図 4.4 から分かるように、ガス抵抗を無視できるほど大きなサイズの小天体についても、トラップ数が少ないことがわかる。このことから、「順番成長, 初期 $a_s = 1.6$, 初期 $e_j = 0.05$ 」

乱数初期値		小天体の半径 (km)													
		100		10		1		0.5		0.1		0.05		0.01	
		L4	L5	L4	L5	L4	L5	L4	L5	L4	L5	L4	L5	L4	L5
1	3	5	2	3	7	4	4	4	2	3	1	7	0	20	
2	1	1	5	7	5	4	4	2	3	5	0	8	0	16	
3	1	5	5	4	7	6	3	4	1	9	2	11	0	25	
4	1	3	3	3	5	3	2	4	1	8	1	12	0	26	
5	3	5	0	3	2	5	2	8	3	8	0	5	0	18	
6	3	4	3	1	0	5	1	5	0	5	0	8	0	20	
7	4	2	4	6	4	6	5	4	2	5	0	14	0	13	
8	3	4	2	6	6	8	4	7	2	4	1	9	0	13	
9	0	1	6	5	7	5	6	7	1	11	2	11	0	13	
10	1	3	6	4	4	10	5	4	3	6	0	10	0	23	

表 4.4 テスト粒子の運命 「順番成長, 初期 $a_s = 1.6$, 初期 $e_j = 0.05$ 」
の場合

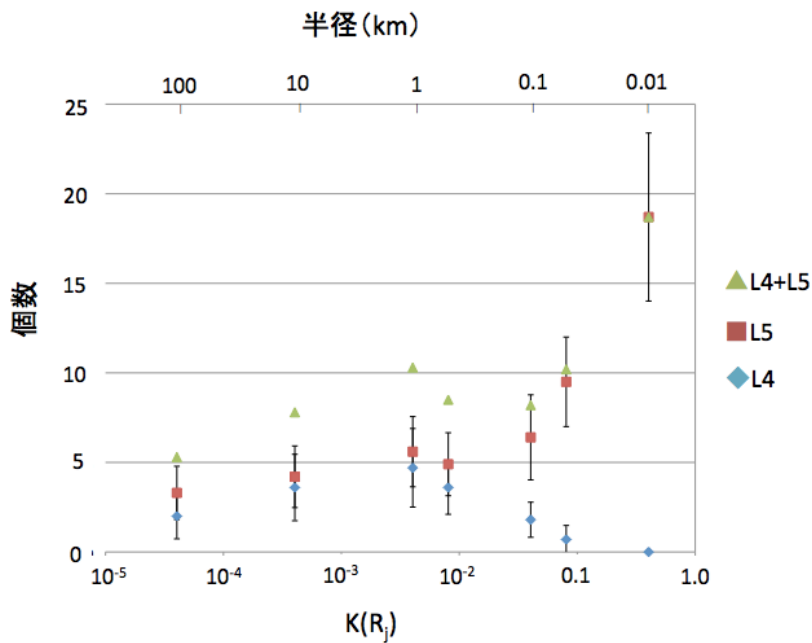


図 4.4 テスト粒子の運命のサイズ分布による違い
(順番成長, 初期 $a_s = 1.6$, 初期 $e_j = 0.05$)

の場合に木星トロヤ群が形成されない原因は、ガス抵抗ではないことがわかった。

「順番成長, 初期 $a_s = 1.6$, 初期 $e_j = 0.05$ 」の場合に木星トロヤ群が形成されない原因として、木星成長によってトラップされた小天体が、後

から成長した土星によって散逸された可能性がある。そこで、木星が成長し終わり、土星が成長を開始する直前 ($t = 1.5 \times 10^5$) のテスト粒子の位置を確かめた (図 4.6)。また、最終的なテスト粒子の位置は図 4.7 の通りである。図 4.6 より、木星成長後に木星トロヤ群が形成されていることが分かる。しかし、形成されたトロヤ群は図 4.7 のように、後から成長した土星の影響により大きく散乱されている。

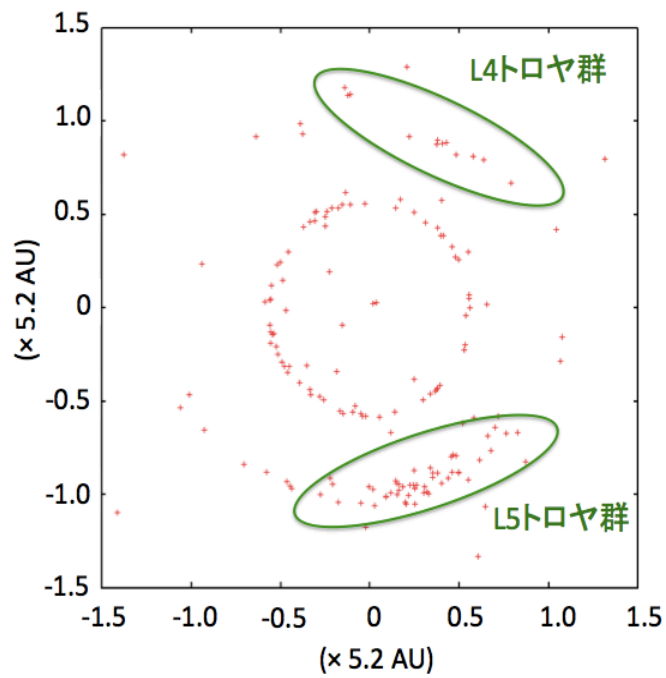


図 4.6 半径 0.1km のテスト粒子の様子
(順番成長, 初期 $a_s = 1.6$, 初期 $e_j = 0.05$, $I_0 = 9$, $t = 1.5 \times 10^5 \text{yr}$)

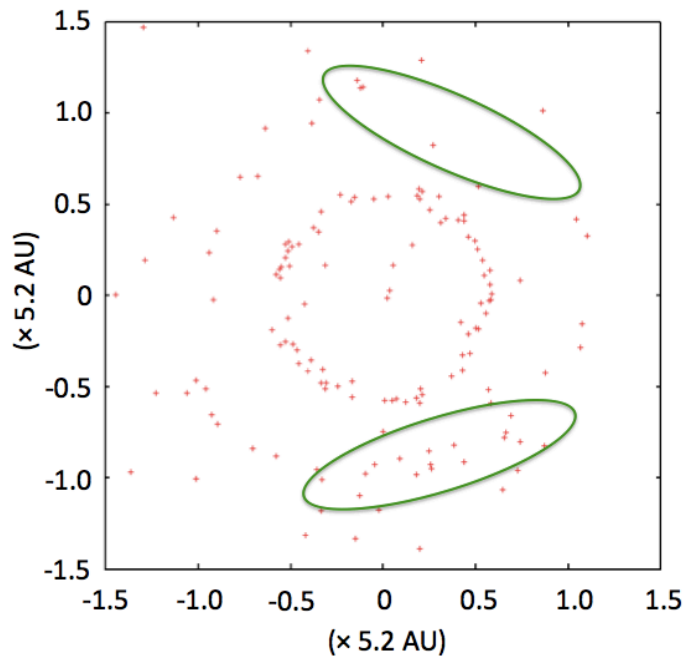


図 4.7 半径 0.1km のテスト粒子の様子
(順番成長, 初期 $a_s = 1.6$, 初期 $e_j = 0.05$, $I_0 = 9$, $t = 3.0 \times 10^5 \text{yr}$)

第5章 まとめと考察

5.1 結果のまとめ

Marzari & Scholl(1998)[12]の主張によれば、円盤ガス中で木星成長に伴い木星トロヤ群が形成されるとき、直径約1km以下の小天体はL4領域よりもL5領域にトラップされやすい。本研究ではこの主張を、惑星形成論上妥当といえる各種パラメータ範囲において再考した。具体的には、木星の離心率と、土星がガス集積をする位置とタイミングに焦点をあてた。その結果、表4.3のように、様々な状況下においてMarzari & Scholl(1998)[12]の主張が正しい事が確認された。

しかし、注意深く結果を見ると、表4.3中の「順番成長, 初期 $a_s = 1.6$, 初期 $e_j = 0.05$ 」のケースでは、そもそもトロヤ群の形成自体が起こっていない事が分かる。以上のことをまとめると、以下のことが言える。

1. 土星成長のタイミングと位置に寄らず、直径約1km以下の小天体については、Marzari & Scholl(1998)[12]の言う「L4, L5非対称性」が確認された。
2. ある初期条件下では、木星トロヤ群が形成されない可能性がある。

5.2 考察

図4.6, 4.7より、木星トロヤ群が散逸される原因は、土星の成長によるトロヤ群安定領域の変化だと推測できる。初期 $a_s = 1.83$ や、「同時成長」の条件のもとでは、土星の影響は無視できるほど小さい。しかし、土星がより木星に近いところで、木星のあとから成長したとすると、木星トロヤ群の散逸が発生する。ここで、初期 $a_s = 1.6$, 初期 $e_j = 0.05$ という条件は、太陽系形成過程において、それほど不思議な状況設定ではない。初期 $a_s = 1.6$ というのは、Gomes(1998)[9]で考えている惑星移動の初期値とほぼ等しい。また、初期 $e_j = 0.05$ も現在の木星の離心率の値である。

つまり、Gomes(1998)[9]による惑星移動を採用しているシナリオ A では、木星トロヤ群の形成が困難である可能性がある。

本研究では、両シナリオのどちらが妥当かを明らかにすることはできなかった。しかし、シナリオ A において、木星トロヤ群の非対称性はおろか、トロヤ群形成自体が危ういという考察を得る事ができた。木星トロヤ群形成プロセスを明らかにするために最も有効な手段は、観測によって木星トロヤ群の起源を解明する事である。シナリオ A, B において、木星トロヤ群の起源は以下のように異なっている。

- 元々木星軌道付近の小天体(シナリオ A)
- カイパーベルト内の小天体(シナリオ B)

つまり、木星トロヤ群小天体をさらに観測することによって、両シナリオのどちらが正しいかが分かる。

5.3 今後の課題

5.3.1 本研究の問題点

Marzari & Scholl(1998)[12]の結果(図 2.1)を完全に再現することはできなかった。本研究では、標準偏差によるエラーバーを付けたが、Marzari & Scholl(1998)[12]の結果はエラーバーの外にある。再現できなかった原因は以下のいずれかだと推測できる。

- Marzari & Scholl(1998)[12]と本研究の計算条件が食い違っている
- 本研究用コードに問題点がある

本研究には惑星の初期条件に関する問題がある。Marzari & Scholl(1998)[12]の論文中に土星軌道長半径の初期値の記載がなかったため、本研究では現在の値を採用した。また、土星と木星の軌道傾斜角を 0° としたほか、すべての計算において、惑星の初期位置関係を太陽, 木星, 土星が一直線になるようにした。本研究の結果をより意味のあるものとするためには、より様々な初期条件での計算を行うべきである。試しに土星の初期位置を 45° ずらして2種類の計算を行ってみたところ、結果は表 5.1 のようになった。土星の初期位置を変えたことで、数値が ± 4 の範囲で変化した。異なった乱数の初期値を与えると、最大で約 10 の数値のぶれが生じる。

それと比較すれば、±4 というのはそれほど大きな数字ではない。しかし、これはほんの一例でしかなく、更なる吟味が必要である。

表 5.1: 土星の初期黄経による結果の違い
($a_s = 1.83, e_j = 0.0157$, 小天体半径 0.1km)

	太, 木, 土が一直線		土星 45° のずれ	
	L4	L5	L4	L5
乱数初期値 9	26	42	23	46
乱数初期値 10	20	35	20	33

コードについては、第 3.5 項の「コードの信頼性」でも示した通り多面的に検証したが、更なる検証が必要である。

5.3.2 今後の拡張

Marzari & Scholl(1998)[12] の主張は、他にも様々な条件で確かめる必要がある。本研究では、土星に着目したが、以下の条件についても検証してみる価値がある。

- 初期テスト粒子の位置
- ギャップ形成を考慮したガス抵抗
- トロヤ群の衝突進化

本研究のモデルでは、初期のテスト粒子が、おおよそ日心距離 5-5.4 内に一様に分布している。しかし、実際には木星がガス集積を開始した時、小天体は一様に分布していないと思われる。よって、小天体の初期分布によって、シミュレーション結果がどう変わるかを検証していくことが今後の課題となる。図 5.1 は木星と土星の質量が $5M_{\oplus}$ で一定である状況下で、テスト粒子の軌道を 1.5×10^5 年計算した結果である (ガス抵抗あり)。多少ではあるが一様性は失われるようにも見受けられる。他にも様々な条件で、テスト粒子の初期位置を吟味する必要がある。

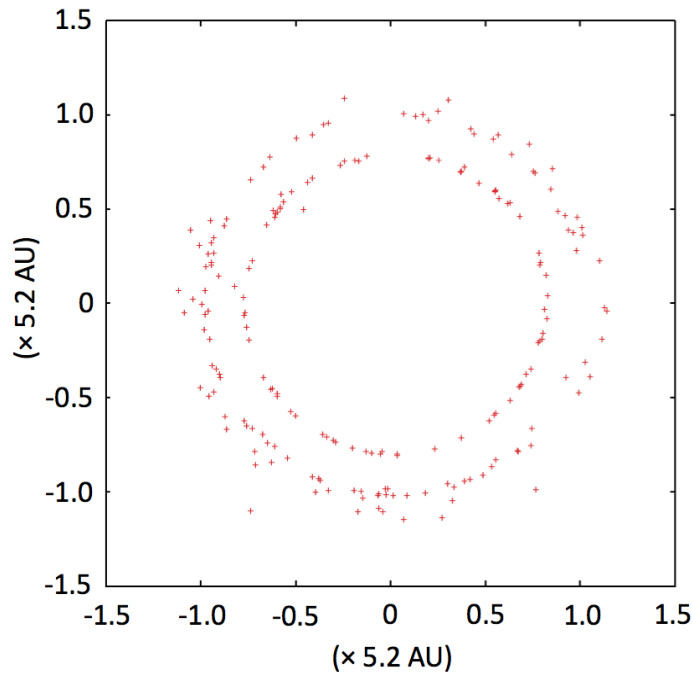


図 5.1 半径 0.1km のテスト粒子の様子
 $m_s = m_j = 5M_{\oplus}$ (一定), $t = 1.5 \times 10^5 \text{yr}$
 $(a_s = 1.83, e_j = 0.0157, I_0 = 9)$

ところで、実際には原始太陽系ガス円盤は木星軌道上で一様に分布していなかったと考えられる [17]。太陽からみて、木星のある側とない側ではガス密度が異なっていたはずである。また、木星へのガス集積の影響のため、木星付近でのガスの進行方向は一定ではない。これらを考慮することで、より実際の問題に近いシミュレーションが可能となる。

また、L4 群には小惑星族が存在するため [18]、L4 トロヤ群が衝突進化を経ていることは確実である [1]。L4 群内だけで衝突進化が起きたとは考えづらいので、L5 群も含めたトロヤ群形成モデルに衝突進化を考慮する必要がある。

付録A 円制限三体問題

三体問題の中でも、1体の質量がないものとするとき、これを制限三体問題という。この1体は他の2体に力を及ぼさないが、他の2体からは力を受ける。制限三体問題の中でも、質量をもつ2体が円運動を行っている場合、これを円制限三体問題という。以下で、この問題を扱っていく。

A.1 円制限三体問題の特殊解

質量をもつ2体が円運動を行っているとき、質量が無限小の1体は、遠方でない限り一般的には不規則な運動をする。しかし、この1体が不規

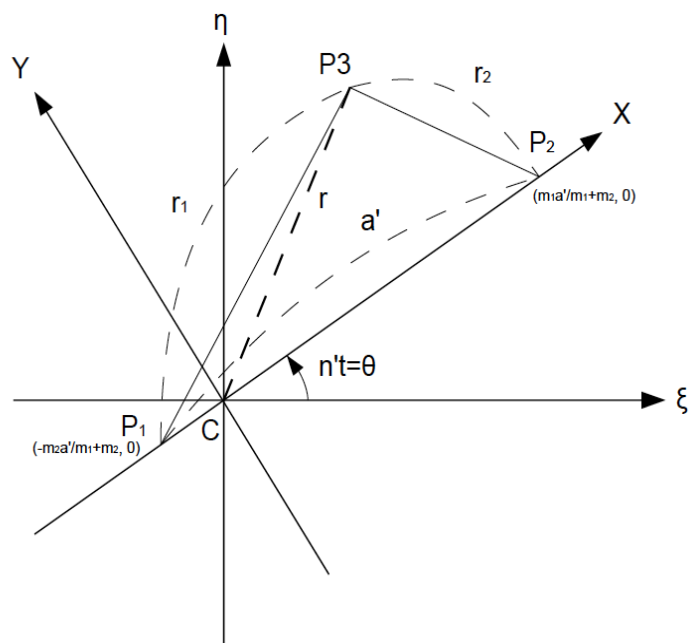


図 A.1 共通重心を原点とする回転座標系

則な運動をしない場所が5ヶ所存在する。(厳密には2ヶ所) これを、円制限三体問題の特殊解という。または、ラグランジュポイントと呼ばれ、 $L_1 \sim L_5$ で表される。以下で、この解を求める。

A.1.1 運動方程式

P_1, P_2 の回転座標系において、微小質量の物体がどのような運動方程式に従うのかを求める。

質量が m_1, m_2 である2つの質点 P_1, P_2 の引力のもとで運動する質点 P_3 の慣性系での運動方程式は、

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \frac{Gm_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2 = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \quad (\text{A.1})$$

である。ただし、 $U = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2}$ である。また、(A.1) 式の最後の等号の補足を以下に記述しておく。

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2} \equiv \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + C_1}, r_2 \equiv \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + C_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + C_1}} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + C_1})^3} \right) \cdot 2(\xi - \xi_1) = -\frac{1}{r_1^3} (\xi - \xi_1) \\ -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(-\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} \right) = Gm_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r_1} \right) \end{pmatrix} + Gm_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r_2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r_2} \right) \end{pmatrix} \\ &= Gm_1 \frac{1}{r_1^3} \begin{pmatrix} \xi - \xi_1 \\ \eta - \eta_1 \\ \zeta - \zeta_1 \end{pmatrix} + Gm_2 \frac{1}{r_2^3} \begin{pmatrix} \xi - \xi_2 \\ \eta - \eta_2 \\ \zeta - \zeta_2 \end{pmatrix} = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \end{aligned}$$

$m_3 = 0$ とする。質点 P_1, P_2 は円運動を行い、この軌道面を基準面とし、 P_1, P_2 の重心 C を座標原点とする。 P_1, P_2 はそれぞれ C を中心とする円上を移動する。 P_3 の座標は (ξ, η, ζ) とする。また、 P_1 と P_2 の距離を a' とし、 ζ 軸周りの角速度を n' とする。

ここで、 ζ 軸の周りを角速度 n' で回転し、 P_1, P_2 を X 軸とする回転座標系 (X, Y, Z) で運動を記述する。すると、 (ξ, η, ζ) と (X, Y, Z) の関係は、

$$\begin{cases} \xi = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ \eta = X \sin \theta + Y \cos \theta \\ \zeta = Z \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

である。 ξ, η を時間で微分すると。

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \dot{X} \cos \theta - \dot{Y} \sin \theta - n' X \sin \theta - n' Y \cos \theta \\ \dot{\eta} = \dot{X} \sin \theta + \dot{Y} \cos \theta + n' X \cos \theta - n' Y \sin \theta \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

となる。さらに微分すると。

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = \ddot{X} \cos \theta - \ddot{Y} \sin \theta - 2n' \dot{X} \sin \theta - 2n' \dot{Y} \cos \theta - n'^2 X \cos \theta + n'^2 Y \sin \theta \\ \ddot{\eta} = \ddot{X} \sin \theta + \ddot{Y} \cos \theta + 2n' \dot{X} \cos \theta - 2n' \dot{Y} \sin \theta - n'^2 X \sin \theta - n'^2 Y \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

が得られる。一方で、 X, Y を ξ, η で表すと、

$$\begin{cases} X = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \\ Y = -\xi \sin \theta + \eta \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

となる。よって、(A.5) 式の偏微分を考え、

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial X} \cos \theta - \frac{\partial U}{\partial Y} \sin \theta \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial U}{\partial Y} \cos \theta \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

である。(A.4) 式より、

$$\begin{cases} \ddot{\xi} \cos \theta + \ddot{\eta} \sin \theta = \ddot{X} - 2n' \dot{Y} - n'^2 X \\ -\ddot{\xi} \sin \theta + \ddot{\eta} \cos \theta = \ddot{Y} + 2n' \dot{X} - n'^2 Y \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

である。一方、(A.1),(A.6) 式より、

$$\begin{cases} \ddot{\xi} \cos \theta + \ddot{\eta} \sin \theta = -\frac{\partial U}{\partial \xi} \cos \theta - \frac{\partial U}{\partial \eta} \sin \theta = -\frac{\partial U}{\partial X} \\ -\ddot{\xi} \sin \theta + \ddot{\eta} \cos \theta = \frac{\partial U}{\partial \xi} \sin \theta - \frac{\partial U}{\partial \eta} \cos \theta = -\frac{\partial U}{\partial Y} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

となる。ここで、(A.7),(A.8) 式の左辺はそれぞれ等しいので、右辺を比較し、回転座標系における以下の運動方程式を得る。

$$\begin{cases} \ddot{X} - 2n' \dot{Y} = -\frac{\partial U}{\partial X} + n'^2 X \\ \ddot{Y} + 2n' \dot{X} = -\frac{\partial U}{\partial Y} + n'^2 Y \\ \ddot{Z} = -\frac{\partial U}{\partial Z} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

A.1.2 正三角形平衡解

微量質量の物体は、質点 P_1, P_2 から、力を受け、前節に示した運動方程式に従って運動する。しかし、ある特殊な場所に物体がある時、回転

座標系において力を受けない場所が存在する。(これを特殊解という)つまり、回転座標系において微小質量の物体が、静止した状態でその特殊な場所にあれば、その物体はその場所に静止し続ける。このような場所は P_1, P_2 の軌道面上に5つ存在するのだが、まずこの節では2つの場所を示す。この2つの場所は、 P_1 と P_2 を一辺とする正三角形の頂点となるような場所である。

特殊解は、物体の速度がゼロかつ加速度がゼロであるような場所である。よって、(A.9) 式に $\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0, \ddot{X} = \ddot{Y} = \ddot{Z} = 0$, を代入し、得られた解が特殊解である。(A.9) 式に $\dot{X} = \dot{Y} = \dot{Z} = 0, \ddot{X} = \ddot{Y} = \ddot{Z} = 0$, を代入すると、

$$-\frac{\partial U}{\partial X} + n'^2 X = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$-\frac{\partial U}{\partial Y} + n'^2 Y = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = 0 \quad (\text{A.12})$$

が得られる。まず、(A.12) 式より、 $Z = 0$ である。以下、 X と Y について解く。ケプラーの第三法則は

$$n'^2 a'^3 = G(m_1 + m_2) \quad (\text{A.13})$$

なので、これを用いて

$$U = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} = -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{a'^3}{r_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{a'^3}{r_2}\right)n'^2 \quad (\text{A.14})$$

となる。これを、(A.10),(A.11) 式に代入して計算すると、以下の2式が得られる。

$$X \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{a'^3}{r_1^3} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{a'^3}{r_2^3}\right) + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} a'^4 \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$Y \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{a'^3}{r_1^3} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{a'^3}{r_2^3}\right) = 0 \quad (\text{A.16})$$

(A.16) 式より、 $Y = 0$ または (下線部) = 0 だとわかる。(下線部) = 0 のとき、(A.15) 式は、 $\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} a'^4 \left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) = 0$ となり、 $r_1 = r_2$ が得られる。これを下線部に代入すると、 $r_1 = r_2 = a'$ が得られる。以上より、 $Z = 0$ の

平面上かつ P_1 と P_2 からの距離が a' である 2 つの点が特殊解であることがわかった。この解の事を、正三角形平衡解と呼び、それぞれの点を L_4, L_5 と呼ぶ。 $(m_2$ の進行方向上にある方が L_4 である。言い換えれば、 m_1, m_2 が反時計周りに回転しているとき、 $Y > 0$ の方が L_4 である。 $Y < 0$ の方が L_5 である。)

A.1.3 直線平衡解

前節では、(A.16) 式の下線部がゼロである場合の議論を行い、正三角形平衡解を導いた。この節では、(A.16) 式の Y がゼロのときを考え、残りの 3 つのラグランジュポイントを求める。これから導く平衡解は、質点 P_1, P_2 の直線上にあることから、直線平衡解と呼ばれている。

以下、(A.16) 式より $Y = 0$ のときを考える。回転座標機での原点が質点 P_1, P_2 の重心なので、 P_1, P_2 の座標はそれぞれ $(-\frac{m_2}{m_1+m_2}a', 0), (\frac{m_1}{m_1+m_2}a', 0)$ である。その事を考慮すると、 $Y = 0$ のとき、 $r_1 = X + \nu, r_2 = X - 1 + \nu$ となる。ただし、

$$\nu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (\rightarrow \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 1 - \nu)$$

とする。(対称性より $0 < \nu \leq 1/2$ とする。つまり、 $m_1 \geq m_2$ とする。) r_1, r_2 を (A.15) 式に代入し、計算すると、

$$X - \frac{(1 - \nu)(X + \nu)}{|X + \nu|^3} - \frac{\nu(X - 1 + \nu)}{|X - 1 + \nu|^3} = 0 \quad (\text{A.17})$$

が得られる。(ただし、 a' の長さを「長さの単位」とした。つまり、 $a'=1$ とした。規格化)(A.17) 式には絶対値が存在するので、以下で場合分けを行っていく。 $X > 1 - \nu, 1 - \nu > X > -\nu, -\nu > X$ の 3 つに分ける。等号が成り立つときは考えない。

i) $X > 1 - \nu$ のとき

(A.17) 式は以下のように書き換えられる。

$$X - \frac{1 - \nu}{(X + \nu)^2} - \frac{\nu}{(X - 1 + \nu)^2} = 0 \quad (\text{A.18})$$

ここで、 $X = 1 - \nu + x'$ とおく。 $(x' > 0)$ これを (A.18) 式に代入すると、

$$x' + 1 - \nu - \frac{1 - \nu}{(1 + x')^2} - \frac{\nu}{x'^2} = 0 \quad (\text{A.19})$$

となる。これを整理すると、

$$x'^5 + (3 - \nu)x'^4 + (3 - 2\nu)x'^3 - \nu x'^2 - 2\nu x' - \nu = 0 \quad (\text{A.20})$$

となる。ここで、デカルトの符号法則¹を用いると、この5次方程式は正根を一つもつことがわかる。この解を、 L_2 とおく。一般に、5次方程式は解けないので、ここでは x' の近似解を求める。まず、後々のために、 m_2 の m_1 に対する相対質量で議論を進める。 $\frac{m_2}{m_1} = m$ とする $\rightarrow \nu = \frac{m}{1+m}, 1 - \nu = \frac{1}{1+m}$ これを、(4.47) 式に代入し、

$$m = \frac{x'^3(3 + 3x' + x'^2)}{(1 - x'^3)(1 + x')^2} \quad (\text{A.21})$$

という式を得る。いま、 $x' > 0, m > 0$ であるから、上式より $x' < 1$ である。 x'^n が $n \rightarrow \infty$ のとき収束するので、マクローリン展開²を行う。すると、以下の式が得られる。

$$\frac{m}{3} = x'^3(1 - x' + \frac{4}{3}x'^2 - \frac{2}{3}x'^3 + \dots) \quad (\text{A.22})$$

ここで、 $(\frac{m}{3})^{\frac{1}{3}} = \alpha$ とすると、(A.22) 式は以下のように書き換えられる。

$$\alpha = x'(1 - \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}x'^2 + \frac{1}{81}x'^3 + \dots) \quad (\text{A.23})$$

ここで、ラグランジュの逆関数定理³を使う。

$$\alpha = x' + \frac{1}{3}(-x'^2 + \frac{1}{3}x'^3 + \frac{1}{81}x'^4 + \dots)$$

¹デカルトの符号法則 実係数の n 次方程式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ の正根の数は、係数 a_0, a_1, \dots, a_n の符号の変化の数 (係数0は飛ばして数える) に等しいか、それより偶数個だけ少ない。(負根の数は $f(-x) = 0$ の正根の数に等しい。)

²マクローリン展開 無限回微分が可能な関数 $f(x)$ について、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

³ラグランジュの逆関数定理 $\zeta = Z + e\phi(\zeta)$ ($e < 1$) と表せるとき、

$$\zeta = Z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}[\phi(z)]^j \text{ である。}$$

より、

$$\alpha = x' + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{3})^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [-\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{81}\alpha^4 + \dots]^j$$

なので、

$$x' = \alpha(1 + \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{9}\alpha^2 - \frac{31}{81}\alpha^3 + \dots) \quad (\text{A.24})$$

である。これで、 L_2 の場所が分かった。 L_2 の座標は $(1 - \nu + x', 0, 0)$ に(A.24)式を代入して得られる座標である。 m_2 の m_1 に対する相対質量 m の値が分かっているとき、 $\alpha = (\frac{m}{3})^{\frac{1}{3}}$ より α の値がわかる。そして、最終的に L_2 の座標の近似値を求めることができる。

ii) $-\nu < X < 1 - \nu$ のとき

(A.17)式は以下のようになる。

$$X - \frac{1 - \nu}{(X + \nu)^2} + \frac{\nu}{(1 - \nu - X)^2} = 0 \quad (\text{A.25})$$

まず、(A.25)式が $-\nu < X < 1 - \nu$ に解を持つかどうかを調べるために(デカルトの符号法則を用いるために)、

$$X^* = \frac{1 - \nu - X}{X + \nu} \quad (\text{A.26})$$

という変数を導入する。このとき X^* の取りうる範囲は、 $-\nu < X < 1 - \nu$ より、 $0 < X^* < \infty$ となる。(こうする事で、デカルトの符号法則を用いる事が可能になる。) (A.26)式を X について解くと、

$$X = \frac{1 - \nu - \nu X^*}{1 + X^*} \quad (\text{A.27})$$

となり、これを(A.25)式に代入して整理すると以下のようになる。

$$(1 - \nu)(X^{*5} + 3X^{*4} + 3X^{*3}) - \nu(3X^{*2} + 3X^* + 1) = 0 \quad (\text{A.28})$$

この式の係数の符号の変化は1回であることから、デカルトの符号法則より正根が唯一存在する。この解は L_1 と呼ばれている。(A.25)式の近似解を求めるために、

$$X = 1 - \nu - x' \quad (\text{A.29})$$

とおく。すると、 X^* は以下のように表せる。

$$X^* = \frac{x'}{1-x'} \quad (\text{A.30})$$

これを (A.28) 式に代入し、以下の式を得る。

$$m = \frac{\nu}{1-\nu} = \frac{x'^3(3-3x'+x'^2)}{(1-x')^3(1+x'+x'^2)} \quad (\text{A.31})$$

P_1, P_2 の距離は 1 なので、 $x' < 1$ である。そこで、マクローリン展開を行うと、

$$\frac{m}{3} = x'^3(1+x'+\frac{4}{3}x'^2+\frac{8}{3}x'^3+\dots) \quad (\text{A.32})$$

が得られる。ここで、 $(\frac{m}{3})^{\frac{1}{3}} = \alpha$ として、マクローリン展開を用いると、

$$\alpha = x'(1+\frac{1}{3}x'+\frac{1}{3}x'^2+\frac{53}{81}x'^3+\dots) \quad (\text{A.33})$$

となる。先と同様に、ラグランジュの逆関数定理を用いることによって、

$$x' = \alpha(1-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{9}\alpha^2-\frac{23}{81}\alpha^3+\dots) \quad (\text{A.34})$$

がわかる。これで、 L_1 の (近似的な) 場所が分かった。

iii) $X < -\nu$ のとき

(A.17) 式は以下のようになる。

$$X + \frac{1-\nu}{(X+\nu)^2} + \frac{\nu}{(X-1+\nu)^2} = 0 \quad (\text{A.35})$$

先と同様に、

$$X^* = -X - \nu \quad (\text{A.36})$$

とおき、 X^* の定義域を $0 < X^*$ とする。(A.36) 式を (A.35) 式に代入すると、

$$X^{*5} + (2+\nu)X^{*4} + (1+2\nu)X^{*3} - (1-\nu)(X^{*2} + 2X^* + 1) = 0 \quad (\text{A.37})$$

上式において係数の符号の変化は 1 回である。よって、デカルトの符号法則より、正根が唯一存在する。つまり、 $X < -\nu$ なる解が唯一存在す

る。この解は L_3 と呼ばれている。(A.37) 式を $(X^{*2} + 2X^* + 1)$ でまとめると、

$$(X^{*3} - 1 + \nu)(X^* + 1)^2 + \nu X^{*3}(X^{*2} + 2) \quad (\text{A.38})$$

となる。上式より、 $\nu \rightarrow 0$ のとき $X^* \rightarrow 1$ である。ここで、

$$X^* = 1 - x' \quad (X = x' - 1 - \nu) \quad (\text{A.39})$$

とおき、(A.38) 式に代入すると、

$$m = \frac{x'(2 - x')^2(3 - 3x' + x'^2)}{(7 - 12x' + 6x'^2 - x'^3)(1 - x')^2} \quad (\text{A.40})$$

となる。いま ν が微小である事を仮定すると、 $X^* \rightarrow 1$ となり、(A.39) 式より $x' \ll 1$ となるので、マクローリン展開を行う。すると以下の式を得る。

$$\frac{7}{12}m = x' + \frac{12}{7}x'^2 + \frac{1567}{583}x'^3 + \frac{15745}{4116}x'^4 + \dots \quad (\text{A.41})$$

ここで、

$$\frac{7}{12}m = \beta$$

とし、ラグランジュの逆関数定理から、

$$x' = \beta(1 - \frac{12}{7}\beta + \frac{1889}{588}\beta^2 - \frac{25405}{4116}\beta^3 + \dots) \quad (\text{A.42})$$

となる。これで、 L_3 の場所がわかった。

A.1.4 L_3 は P_2 の軌道上にあるのか？

もし、 ν が微小である時、 L_3 の X 座標が約 -1 となる。そこで生まれる疑問は、「果たして、 L_3 は P_2 の軌道上にあるのか」というものである。この項では、 L_3 が P_2 の軌道上にないことを確かめる。

今、 ν が微小であるときを考える。このとき、

$$\beta = \frac{7}{12}m = \frac{7}{12} \frac{\nu}{1 - \nu} \simeq \frac{7}{12}\nu$$

である。よって、(A.42) 式に上式を代入し、二次微小を無視すると、

$$x' \simeq \frac{7}{12}\nu \quad (\text{A.43})$$

であることがわかる。前項で述べたように、 L_3 の座標は $(x' - 1 - \nu, 0, 0)$ である。この座標に(A.43)式を代入すると、 L_3 の座標は $(-1 - \frac{5}{12}\nu, 0, 0)$ となる。一方、 P_2 の軌道は P_1, P_2 の重心を中心とする、半径 $1 - \nu$ の円であるので、慣性系で P_2 は $y = 0$ のとき $x = -1 + \nu$ を通る。すなわち、 L_3 の場所と、 P_2 の軌道では $\frac{17}{12}\nu$ のずれがある。

では、実際に太陽と地球の相対質量で考えてみる。

$$\nu_{\text{太陽-地球}} \simeq 10^{-6}$$

であるから、先述のとおり、地球の軌道と L_3 は約 10^{-6} だけ離れている。ちなみに長さの単位は、太陽と地球の距離を1としている。太陽と地球との距離が、 $1.5 \times 10^{11}m$ であるから、 L_3 と地球の軌道は約 1.5×10^5m 離れていると言える。

A.2 ヤコビ積分とゼロ速度曲線

円制限三体問題にはヤコビ積分という保存量がある。また、そこから微小質量物体の運動可能領域や、運動可能-不可能境界線として、ゼロ速度曲線を求める事が出来る

(A.9)式は以下のように書き換える事が出来る。

$$\ddot{X} - 2n'\dot{Y} = -\frac{\partial U^*}{\partial X} \quad (\text{A.44})$$

$$\ddot{Y} + 2n'\dot{X} = -\frac{\partial U^*}{\partial Y} \quad (\text{A.45})$$

$$\ddot{Z} = -\frac{\partial U^*}{\partial Z} \quad (\text{A.46})$$

ここで、 U^* は

$$U^* = U - \frac{1}{2}n'^2(X^2 + Y^2) \quad (\text{A.47})$$

である。(A.44),(A.45),(A.46)式に、それぞれ $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ を掛けて和をとると、

$$\dot{X}\ddot{X} + \dot{Y}\ddot{Y} + \dot{Z}\ddot{Z} = -\frac{\partial U^*}{\partial X} \frac{dX}{dt} - \frac{\partial U^*}{\partial Y} \frac{dY}{dt} - \frac{\partial U^*}{\partial Z} \frac{dZ}{dt} = -\frac{dU^*}{dt} \quad (\text{A.48})$$

となる。上式を時間積分し、

$$\frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + U^* = \text{const.} \quad (\text{A.49})$$

が得られる。これは、円制限三体問題における保存量であり、ヤコビ積分と呼ばれている。天体力学では U^* の符号を替えたもの

$$\Omega = -U^* = \frac{1}{2}n'^2(X^2 + Y^2) + \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} \quad (\text{A.50})$$

が使われている。よって、ヤコビ積分は以下のように書ける。

$$\frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - \Omega = -C \quad (\text{A.51})$$

この式から、微小質量物体の運動可能領域を知る事が出来る。運動エネルギーは正であるから、

$$\Omega \geq C \quad (\text{A.52})$$

でなければならない。 Ω は X, Y, Z のみの関数なので、(A.52) 式は微小質量物体の運動可能領域を示す式である。ここで、 $\Omega = C$ (運動エネルギーがゼロ) が示す曲面をゼロ速度曲面という。また、 $Z = 0$ に限定して考えたとき、 $\Omega = C$ が示す曲線をゼロ速度曲線という。

A.3 平衡解の安定性

平衡点上に一寸のずれもなく、微小質量物体を静止した状態で置けば、その物体は静止し続ける。しかし、平衡点から微小な距離だけ離れたところに物体を静止した状態でおいた時、物体は静止し続けない。 L_1, L_3 の直線平衡解付近においた時、物体は発散し、 $\nu < 0.0385209 \dots$ なら L_4, L_5 の正三角形平衡解付近においた時、物体は平衡解付近にとどまり続ける。

平衡解からの微小変異を x, y, z とする。(慣性系の x, y, z とは別物である) すると、ラグランジュポイントの座標を L_i ($X_i, Y_i, Z_i = 0$) としたとき、

$$X = X_i + x, Y = Y_i + y, Z = z$$

となる。これを、運動方程式 (A.44), (A.45), (A.46) に代入すると、以下のようなになる。

$$\ddot{x} - 2n'\dot{y} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i^2} x + \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Y_i} y + \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Z_i} z = 0 \quad (\text{A.53})$$

$$\ddot{y} + 2n'\dot{x} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i \partial X_i} x + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i^2} y + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i \partial Z_i} z = 0 \quad (\text{A.54})$$

$$\ddot{z} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i \partial X_i} x + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i \partial Y_i} y + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i^2} z = 0 \quad (\text{A.55})$$

上式を求めるにあたって、 x, y, z についての2次の項は無視した。また、 U^* についての偏微分は平衡点において評価したものである。つまり、

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_i} = \frac{\partial U^*}{\partial X} \Big|_{X=X_i}$$

ということである。 $\frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Z_i} = 0, \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i \partial Z_i} = 0$ なので、(A.53),(A.54),(A.55) 式は以下のようになる。

$$\ddot{x} - 2n'\dot{y} + ax + by = 0 \quad (\text{A.56})$$

$$\ddot{y} + 2n'\dot{x} + bx + cy = 0 \quad (\text{A.57})$$

$$\ddot{z} + dz = 0 \quad (\text{A.58})$$

$$a = \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i^2}, b = \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Y_i}, c = \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i^2}, d = \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z_i^2} \quad (\text{A.59})$$

(A.59) 式の d を計算すると、

$$d = \left\{ \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{a'}{r_1} \right)^3 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{a'}{r_2} \right)^3 \right\} n'^2 \quad (\text{A.60})$$

であり、いずれの平衡点においても $d > 0$ である。よって、 Z 方向の微小振動は調和振動となり、安定である。また、正三角形平衡解では $d = n'^2$ であるので、 Z 方向の振動周期は2天体 P_1, P_2 の公転周期に等しい。

以下では、 Z 方向の運動は考えない。(A.56),(A.57) 式は定数係数の線形微分方程式なので、解は以下のように表せる。

$$x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t} \quad (\text{A.61})$$

これを (A.56),(A.57) 式に代入すると、

$$A(\lambda^2 + a) + B(-2n'\lambda + b) = 0 \quad (\text{A.62})$$

$$A(2n'\lambda + b) + B(\lambda^2 + c) = 0 \quad (\text{A.63})$$

となる。上の2式が $A = B = 0$ 以外の解を持つためには、行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + a & -2n'\lambda + b \\ 2n'\lambda + b & \lambda^2 + c \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.64})$$

が成立する必要がある。(固有方程式) 上式を展開すると、

$$\lambda^4 + (4n'^2 + a + c)\lambda^2 + ac - b^2 = 0 \quad (\text{A.65})$$

となる。ここで、 $\lambda^2 = \sigma$ とおくと、(A.65) 式は

$$\sigma^2 + (4n'^2 + a + c)\sigma + ac - b^2 = 0 \quad (\text{A.66})$$

のように書ける。上式を解き、 $\sigma < 0$ という実根が得られた場合、 λ は純虚数となり、(A.61) 式に代入すると三角関数 (振動解) となり、安定である。それ以外の場合では、解が増大する成分を持つので不安定である。ただし、ここで言っている安定や不安定というのは、あくまで x, y, z が微小であり (A.53), (A.54), (A.55) 式で 2 次の項を無視できる場合のみ示唆できる。

A.3.1 正三角形平衡解の安定性

L_4, L_5 の場合の a, b, c は、

$$a = \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i^2} = -\frac{3}{4}n'^2 \quad (\text{A.67})$$

$$b = \frac{\partial^2 U^*}{\partial X_i \partial Y_i} = \mp \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\nu)n'^2 \quad (\text{A.68})$$

$$c = \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y_i^2} = -\frac{9}{4}n'^2 \quad (\text{A.69})$$

である。これを (A.66) 式に代入すると、

$$\sigma^2 + \sigma n'^2 + \frac{27}{4}\nu(1 - \nu)n'^4 = 0 \quad (\text{A.70})$$

となる。上式の判別式 D は、

$$D = \{1 - 27\nu(1 - \nu)\} n'^4 \quad (\text{A.71})$$

となる。 $D = 0$ となるのは、

$$\nu = \nu_c = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) = 0.0385209 \quad (\text{A.72})$$

のときである。 $\nu < \nu_c$ のとき $D > 0$ となり、(A.70) 式は2つの実根 σ_1, σ_2 を持つ。解と係数の関係より $\sigma_1 + \sigma_2 = -n'^2 < 0, \sigma_1\sigma_2 > 0$ であるから、 $\sigma_1, \sigma_2 < 0$ である事が分かる。よって、 λ は純虚数となり (A.61) 式の解は三角関数となり安定である。一方、 $\nu < \nu_c$ 以外のときは (A.61) 式は増大する成分を持つため、不安定となる。まとめると、正三角平衡解の安定性の条件は、

$$\nu < \nu_c = 0.0385209 \quad (\text{A.73})$$

である。

A.3.2 直線平衡解の安定性

直線平衡解の場合の a, b, c を求める。この項以降では、 $a' = 1, m_1 + m_2 = 1, G = 1$ のように規格化を行う。すると、

$$a = \frac{\partial^2 U^*}{\partial X^2} = -1 + \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - \frac{3m_1(X + m_2)^2}{r_1^5} - \frac{3m_2(X - m_1)^2}{r_2^5} \quad (\text{A.74})$$

$$b = \frac{\partial^2 U^*}{\partial X \partial Y} = -3Y \left\{ \frac{m_1(X + m_2)}{r_1^5} - \frac{m_2(X - m_1)}{r_2^5} \right\} \quad (\text{A.75})$$

$$c = \frac{\partial^2 U^*}{\partial Y^2} = -1 + \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - 3Y^2 \left(\frac{m_1}{r_1^5} + \frac{m_2}{r_2^5} \right) \quad (\text{A.76})$$

である。ここで、直線平衡解は $Y = 0$ である事に注意すると、

$$b = 0 \quad (\text{A.77})$$

$$c = -1 + \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \quad (\text{A.78})$$

である。まず、 L_1 における a, c の正負を求める。 L_1 では

$$r_1 = X + m_2, r_2 = m_1 - X \quad (\text{A.79})$$

となるから、

$$a = -1 - 2\frac{m_1}{r_1^3} - 2\frac{m_2}{r_2^3} < 0 \quad (\text{A.80})$$

である。(A.15) 式に (A.79) 式を代入すると、

$$\frac{m_1}{r_1^2} = r_1 - m_2 + \frac{m_2}{r_2^2} \quad (\text{A.81})$$

となる。これを (A.78) 式に代入すると、

$$c = -1 + \frac{1}{r_1} \left(r_1 - m_2 + \frac{m_2}{r_2^2} \right) + \frac{m_2}{r_2^3} = m_2 \left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2^2} \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \right) = \frac{m_2}{r_1} \left(-1 + \frac{1}{r_2^3} \right) \quad (\text{A.82})$$

となる。ここで、 L_1 は P_1, P_2 の間にあるので $r_2 < 1$ より $c > 0$ となる。よって、

$$a < 0, c > 0 \quad (\text{A.83})$$

である。 L_2, L_3 についても、同様の計算により (A.83) 式の結果が得られる。よって、(A.66) 式の判別式 D は、

$$D = (4 + a + c)^2 - 4ac > 0 \quad (\text{A.84})$$

である。よって、 σ は 2 実根をもつ。片方の根は正であるが、もう一方が負であるから、直線平衡解は不安定である。

参考文献

- [1] トロヤ群小惑星から探る太陽系惑星形成史 (吉田二美) <http://www-irc.mtk.nao.ac.jp/fumi/Fumi/index.php?TS4>
- [2] 木下宙, 天体と軌道の力学, 1998
- [3] Yoshida, F. & Nakamura, T., 2008, *PASJ*, **60**, 297
- [4] O'Brien, D. P. & Morbidelli, A., *Asteroids, Comets, Meteors*, 2008
- [5] Hayashi, C., 1981, *PTPS*, **70**, 35
- [6] Tsiganis, K. *et al.* 2005, *Nature*, **435**, 459
- [7] Morbidelli, A. *et al.* 2005, *Nature*, **435**, 462
- [8] Davis, D. R. *et al.* 2002, in *ASTEROIDS III*, p.548
- [9] Gomes, R., 1998, *AJ*, **116**, 2590
- [10] Freistetter, F., 2006, *A&A*, **453**, 353
- [11] Peale, S. J., 1993, *Icarus*, **106**, 308
- [12] Marzari F. & Scholl H., 1998, *Icarus*, **131**, 41
- [13] de ELia, G. C. & Brunini, A., 2007, *A*, **475**, 375
- [14] Weidenschilling, S. J., & D. R. Davis, 1985, *Icarus*, **62**, 16
- [15] 井田ほか, 微惑星系、惑星リング系の N 体計算, 2006
- [16] Ikoma, M. *et al.*, 2000, *ApJ*, **537**, 1013
- [17] Tanigawa T. & Watanabe S., 2002, *ApJ*, **580**, 506
- [18] Beauge, C. & Roig, F., 2001, *Icarus*, **153**, 391

謝辞

本研究を行うにあたって、本当に多くの方々にお世話になりました。指導教員である中本准教授には、私がゼミ担当者となるたびに質問させていただきました。お忙しいのにも関わらず、真摯に質問に対応して下さった事、ここでお礼申し上げます。直接ご指導をいただいた佐々木博士には、何から何まで大変お世話になりました。私の卒業研究のアドバイスのために、毎週3時間以上もの時間をかけて下さったおかげで、無事に卒業研究を終える事ができました。長沢准教授には、研究に行き詰まったとき、助けていただきました。同じ学生室の立浪氏、原川氏、大貫氏にはソフトの使い方をはじめ、コードの書き方や惑星形成論など、様々なご指導をいただき、大変感謝しております。また、井田研究室、中本研究室の同期の黒崎氏、瀧氏、本園氏、山崎氏にはいつも刺激を受け、勝手ながら私も負けじとがんばる事ができました。最後に、井田研究室・中本研究室の諸先輩方と各教員の方々に繰り返しお礼申し上げます。本当にありがとうございました。